МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

Студентська звітна конференція 2019

Фізико-математичний факультет СумДПУ ім. А.С.Макаренка

Матеріали результатів досліджень молодих науковців

ВИПУСК 13

Том 1

Суми – 2019

Друкується згідно з рішенням вченої ради фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка

С45 Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2019. – Випуск 13. – Том 1. – 80 с.

До збірника увійшли результати курсових та дипломних досліджень студентів фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, які обговорювалися на звітній науковій конференції у квітні 2019 року.

Матеріали подаються в авторській редакції з позитивною рецензією наукового керівника.

ЗМІСТ

Батюк Ігор
Магістрант, спеціальності «Середня освіта (Інформатика)»
igorbat2580@gmail.com
Науковий керівник - О.Г. Медведовська

ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ GOOGLE В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ ЗЗСО

На сьогоднішній день досить складно переоцінити вплив комп'ютера на будь-яку сферу діяльності сучасної людини. Ще з початку свого розвитку комп'ютери були покликані допомагати людині в своїй діяльності. Але зважаючи на стрімкий розвиток техніки та програмних засобів, не менш стрімко змінюється і їх вартість, і в сучасних реаліях ми стикнулися з проблемою забезпечення кожного: працівника, здобувача освіти, та інших категорій громадян, сучасним апаратним та програмним забезпеченням, для їх продуктивної діяльності. Виходом з цього положення ми передбачаємо впровадження та використання сучасних хмарних сервісів в усіх сферах діяльності.

Хмарні сервіси будуються на технології хмарних обчислень. Хмарні обчислення це система, основним завданням якої є забезпечення безперебійного та зручного доступу до загальнодоступного серверу обчислювальних ресурсів, за допомогою мережі Інтернет [1].

Ми вважаємо що найбільш доцільним для розвитку освітнього процесу є використання хмарних сервісів «Google Apps for Education» від всесвітньо відомого бренду Google. І не дивлячись на те що «Google Apps for Education» на сьогодні являються безкоштовними і вільно поширюваними, але їх функціоналу достатньо щоб слугувати платформою для формування інформаційно-освітнього простору.

Інформаційно-освітній простір – це сервіс безперебійного забезпечення доступу до навчальних матеріалів, надання можливості всім суб'єктам освітнього процесу обмінюватися інформацією та забезпечення моніторингу ефективності навчальної взаємодії [2].

Варто відзначити що компанія Google надає доступ до всіх своїх сервісів та послуг використовуючи при цьому всього лише один акаунт користувача, що дуже зручно, та значною мірою полегшує роботу користувачу[3].

Хмарні сервіси Google мають широку сферу застосування, і можна виділити таку їх структуру:

Рис. 1 Структура Хмарних сервісів Google.

Сервіси, Google Apps for Education, створені та зорієнтовані на спільну роботу та спілкування в мережі, що дає змогу організувати навчальну діяльність як індивідуально, кожного учня, або роботу в умовах: класу, групи, тощо.

Веб-додатки Google, мають такі основні можливості:

- Gmail – сервіс електронної пошти. Надає доступ до поштових скриньок за допомогою мережі Інтернет, вся робота базується на використанні таких протоколів: POP3, SMTP, IMAP і на сьогоднішній день є абсолютно безкоштовною.
- Контакти – он-лайн сервіс в якому кожен користувач моє змогу редагувати та наповнювати свою особисту адресну книгу, створювати кола контактів (групи) і використовувати їх при розсилці повідомлень різного змісту.
- Google Календар – аналог звичного календаря, який автоматично синхронізується з сервером, та зберігає всю інформацію на хмарному накопичувачі, це означає що замітки записані до даного календаря зберігаються навіть коли людина працює з іншого пристрою, достатньо авторизуватися в системі Google.
- GoogleTalk – сервіс для забезпечення роботи голосового чарту, та миттєвого обміну електронними повідомленнями. Є аналогом відомих програм: ICQ і Skype, має можливість створювати відео конференції для 9 користувачів одночасно.
- Google Сайти та Блоги – простий у використанні, але потужний, на базі структурованої вікі хостинг зі створення та наповнення власного сайту чи блогу, що є необхідною складовою роботи сучасного вчителя.
- Youtube – он-лайн сервіс для монтажу відео файлів та їх розміщення на сервері з метою надання до нього спільного доступу необмеженої кількості користувачів.
- Google+ – багатомовна соціальна мережа та ідентифікаційна служба, яка належить компанії Google. Замість звичного, для користувачів інших соціальних мереж, єдиного списку «друзів» у Google+ є можливість розподіляти контакти за «колами»: друзі, родичі, колеги тощо.
- Новини – сервіс зі збору лише актуальної інформації з усього світу за заданими інтересами, групи інтересів окремого користувача.
- Групи – можливість створювати групи, щоб спілкуватися електронною поштою в режимі один до групи, тобто відправляючи на адресу групи листа людина автоматично відправляє його усім користувачам, включеним до цієї групи.
- Фотознімки – надає зручну можливість переглядати, змінювати і організовувати фотографії. Має зв'язок з диском, Youtube та Google+ [4].

Основний критерій за яким можна порівняти перелічені додатки те, що всі вони є хмарними сервісами, і не потребують встановлення на комп'ютер користувача, все що потрібно для їх роботи, це веб-браузер та з'єднання з мережею Інтернет.

Серед усіх доступних сервісів Google, необхідно виокремити Google Диск. Google Диск – сховище даних, яке належить компанії Google, за допомогою якого користувачі можуть зберігати свої дані на серверах у хмарі і ділитися ними з іншими користувачами в Інтернеті. У середовищі диску можна створювати та редагувати текстові документи, таблиці, презентації, малюнки, форми опитувань. Якщо говорити про переваги даних сервісів над звичними редакторами текстових документів, таблиць та презентацій то основною перевагою є надання спільного доступу до файлу для спільного створення, редагування та форматування, в будь-який час, та з будь-якого робочого місця, до того ж уся робота здійснюється у режимі реального часу та є можливість відстежувати зміни, які вносив кожен з користувачів [5]. Для роботи з електронними документами створено віртуальний додаток Google Docs,– розроблений компанією Google.

Google Docs – безкоштовний мережевий офісний пакет, що включає текстовий, табличний редактор і додаток для створення презентацій.

Google диск, має простий та інтуїтивно зрозумілий інтерфейс. Для створення документу будь-якого типу, необхідно:

- за допомогою зручного вам браузера перейти на веб-сайт: https://www.google.com
- авторизуватися в системі Google (створити акаунт, для тих хто ще незареєстрований);

скористувавшись кнопкою «Додатки Google», обрати додаток «Диск» з випадаючого меню;

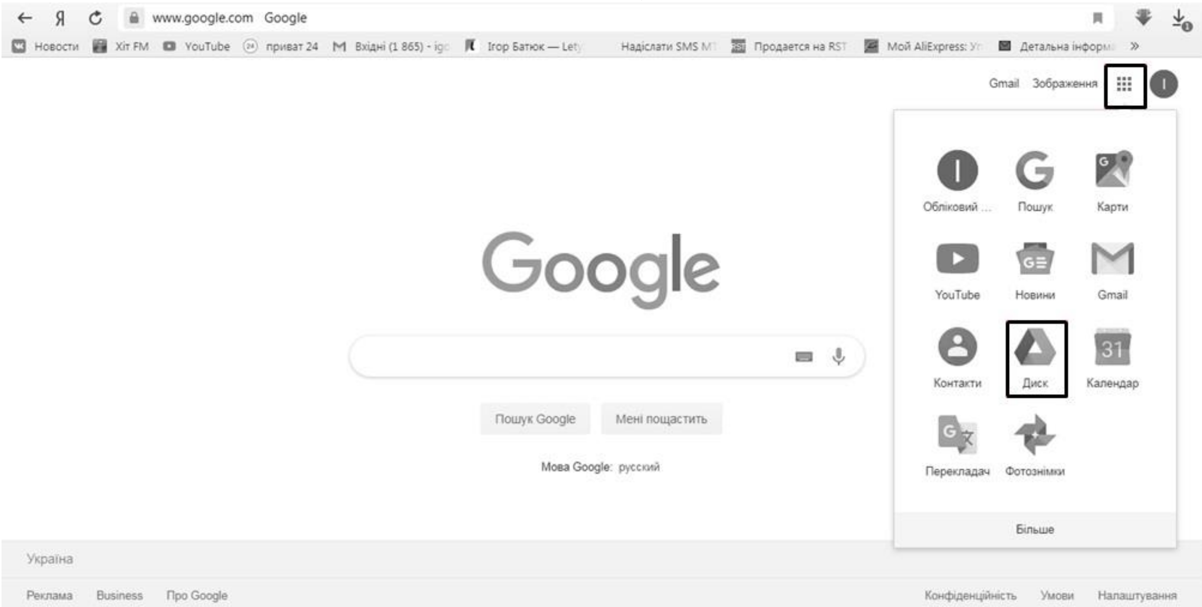


Рис.2 Послідовність дій для створення документа.

- після чого необхідно натиснути кнопку «Створити», і з випадаючого меню обрати потрібний тип документа

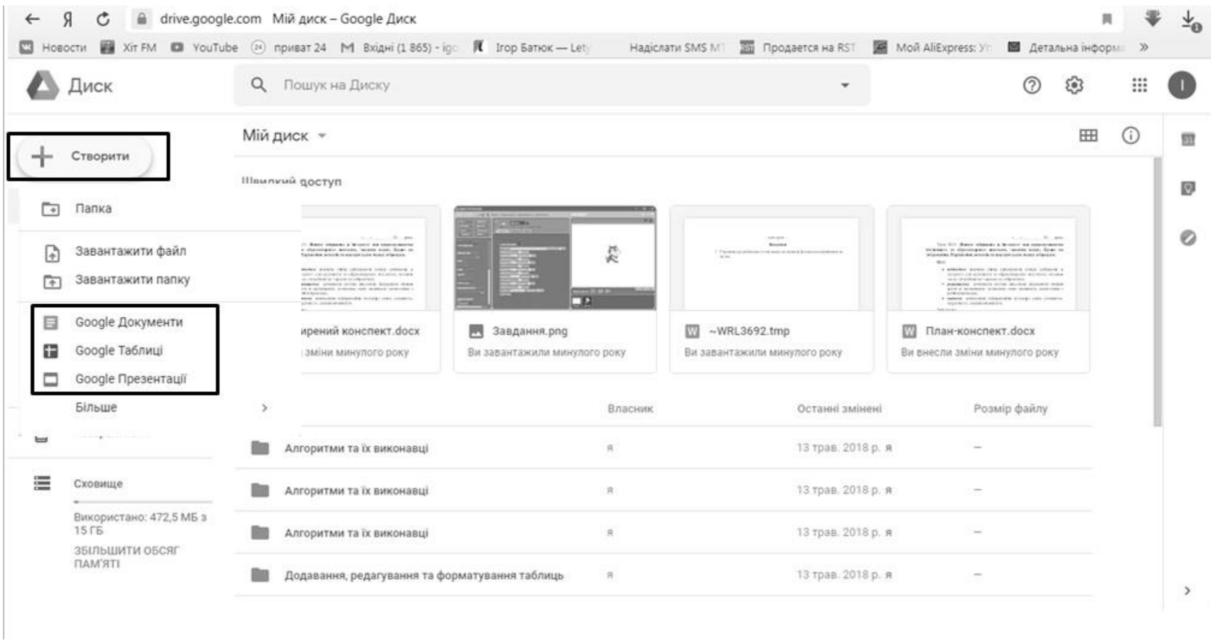


Рис.3 Послідовність дій для створення документа.

Варто відмітити що при наведенні на будь-який інструмент, аналогічно звичному редакторі, підсвічується його назва, що досить зручно для людей, які малоосвічені в роботі подібних програмних засобів.

При використанні даних хмарних сервісів можна виділити такі переваги над звичними аналогами:

- надійність, оскільки дані сервіси мають широкий функціонал для шифрування даних;
- індивідуальний та колективний доступ до даних та сервісів;
- можливість формування груп та окремих підрозділів користувачів;
- фільтрування небажаного контенту самою системою, адміністратором а також самим користувачем;
- централізоване адміністрування завдяки розширеному набору методів та засобів контролю якості надання послуг;
- надання безкоштовного, дискового (хмарного) простору, що надається користувачеві;
- можливість користуватися всіма доступними сервісами з використанням мобільних пристроїв, в даному випадку представлена повна підтримка мобільними пристроями, що працюють під управлінням операційної системи Android.

Серед недоліків даних сервісів можна виділити лише прив'язаність робочого місця учасника освітньої діяльності до стабільного та швидкісного з'єднання з мережею Інтернет. [6].

Отже, в умовах сучасних реалій, та високих затрат на забезпечення сучасної людини якісним програмним забезпеченням, хмарні технології мають необхідну кількість переваг для їх успішного впровадження та використання в усіх сферах сучасного світу. Якщо говорити про використання хмарних технологій в освіті то варто відмітити, що дані сервіси мають цілу низку інструментів для успішного навчання, та моніторингу рівня засвоєння навчального матеріалу кожного учня при навчанні як індивідуально так і в умовах групи, класу, тощо. Також великого значення в освітньому процесі набуває здатність колективної роботи з одним і тим же документом, де учні можуть вільно проявляти свої навички та вміння, висловлювати свою думку, що може бути дуже корисно для учнів які бояться живого спілкування.

Також варто відмітити, що для успішного використання даних сервісів необхідно вносити зміни і в: методологію навчання, це перш за все стосується вчителів, так як на них лежить відповідальність за правильність подання та контролю навчального матеріалу.

Список використаних джерел

1. Григорьев С.Г, Гриншкун В.В. Информатизация образования. Фундаментальные основы: учебник для студентов педагогических вузов и слушателей системы повышения квалификации педагогов. М.: МГПУ, 2008. 231 с.

2. Осадчий В. В. Сучасні реалії і тенденції розвитку інформаційно-комунікаційних технологій в освіті / В. В. Осадчий, К. П. Осадча / Інформаційні технології і засоби навчання. - 2015. - Т. 48, вип. 4. - С. 47-57. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ITZN_2015_48_4_6

3. Служби Google для навчальних закладів – Режим доступу: https://edu.google.com/?modal_active=none.

4. Осадчий, В. В. Засоби інформаційних технологій у професійній підготовці майбутніх учителів/ В. В. Осадчий Педагогіка, психологія та медико-біологічні проблеми виховання і спорту : зб. наук. пр. за ред. С. С. Єрмакова. – Х., 2009. – № 11. – С. 72–78.

5. Holzner S. Google Docs 4 Everyone/ Steven Holzner, Nancy Holzner. – Indianapolis: QUE, 2009. – 251 p.
6. Побіженко І. О. Перспективи використання хмарних технологій для організації навчального процесу у вищих навчальних закладах / І. О. Побіженко, Т. Г. Білова, В. О. Ярута // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. – 2014. – № 4(41). – С. 167-170.

Анотація. Батюк І. Хмарні сервіси як заміна офісним додаткам. *У статті розглянуто основні хмарні сервіси, що надаються компанією Google, показано основні сфери застосування даних сервісів та важливість їх використання як альтернативи звичних програмних засобів, що встановлюються на комп'ютер, наведено послідовність дій при роботі з електронними документами в середовищі хмарного сервісу Google диск.*

Ключові слова: *хмарні сервіси, Google Apps for Education, Google диск, Google Docs, Gmail, хмарні обчислення, інформаційно-освітній простір.*

Abstract. Batyuk I. Cloud services as a replacement for office applications. *The article discusses the main cloud services provided by Google, shows the main areas of application of these services and the importance of their use as an alternative to the usual software installed on the computer, shows the sequence of actions in dealing with electronic documents in the cloud service Google Drive.*

Keywords: *cloud services, Google Apps for Education, Google Drive, Google Docs, Gmail, cloud computing, information and education space.*

Блещенко Наталія
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
biqbos96@gmail.com
Науковий керівник - О. П. Страх

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЗА ЛЯПУНОВИМ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Як відомо, більшість реальних динамічних об'єктів мають властивості, що можуть бути описані апаратом якісної теорії диференціальних рівнянь; у першу чергу – це різного роду механічні системи. При розв'язанні ряду задач, що стосуються дослідження таких систем, важливо знати не один конкретний розв'язок, що відповідає даним початковим умовам, а характер його поведінки з плином часу та при зміні значень початкових умов. Цими питаннями займається теорія стійкості руху, що була створена наприкінці XIX ст. О. М. Ляпуновим для дослідження характеру залежності розв'язків систем диференціальних рівнянь від початкових даних на великих інтервалах часу.

Основна задача теорії стійкості полягає в розробці методів, які дозволяють судити про стійкість розв'язку певної системи звичайних диференціальних рівнянь, не знаючи його загального виду. Розглянемо основні означення та результати згаданої вище теорії [1].

Розглянемо систему

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

де $y: I \to D \subset \mathbb{R}^n$, $y = col(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – n-вимірний вектор-стовпчик шуканих функцій $y_i = y_i(x) \in C^1(I)$, $f(x, y) = col(f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y))$, $I \coloneqq [x_0, +\infty)$.

Припускається, що розв'язок задачі Коші для системи (1) з довільними початковими даними існує та має властивість єдиності.

Означення 1. Розв'язок $y^*(x)$ системи (1) називають стійким за Ляпуновим (при $x \to \infty$), якщо виконуються умови:

1) цей розв'язок існує на півосі $[x_0, +\infty)$;

2) для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного $x_1 \geq x_0$ можна вказати таке $\delta = \delta(x_1, \varepsilon) > 0$, що для кожного $\tilde{y}$ такого, що $\|\tilde{y} - y^*(x_1)\| < \delta$, розв'язок $y(x)$ системи (1), який задовольняє початкову умову $y(x_1) = \tilde{y}$, існує на півосі $[x_1, +\infty)$ і справджує нерівність:

$$\|y(x) - y^*(x)\| < \varepsilon \ \ \forall x \geq x_1.$$

Нестійким (при $x \to \infty$) називається розв'язок, для якого порушується хоча б одна з умов, що фігурують в означенні 1.

Означення 2. Розв'язок $y^*(x)$ системи (1) називають асимптотично стійким за Ляпуновим (при $x \to \infty$), якщо мають місце наступні умови:

1) цей розв'язок стійкий за Ляпуновим;

2) для довільного $x_1 \geq x_0$ можна вказати таке $\Delta = \Delta(x_1) > 0$, що для кожного $\tilde{y}$ такого, що $\|\tilde{y} - y^*(x_1)\| < \Delta$, розв'язок $y(x)$ системи (1), який задовольняє початкову умову $y(x_1) = \tilde{y}$, існує на півосі $[x_1, +\infty)$ і має властивість

$$\lim_{x \to \infty} \|y(x) - y^*(x)\| = 0.$$

Аналогічно можна розглядати стійкість та асимптотичну стійкість розв'язків системи (1), яка визначена на множині $(-\infty, x_0] \times D$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$, при $x \to -\infty$.

Далі, як частковий випадок системи (1), розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$y = A(x)y \tag{2}$$

з неперервними на півосі $[a, \infty)$ коефіцієнтами. Нехай $y^*(x)$ — її довільний розв'язок. За теоремою існування розв'язку задачі Коші для лінійних однорідних систем область існування $y^*(x)$ – уся піввісь $[a, \infty)$. Тому розв'язки системи (2) одночасно або стійкі (асимптотично стійкі), або нестійкі

У роботі [2, с. 432–433] показано, що стійкість системи (2) повністю визначається властивостями її довільної фундаментальної матриці $Y(x)$. Так, оскільки розв'язок системи (2), що задовольняє початкову умову $y(x_1) = \tilde{y}$ має вигляд:

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_1)\tilde{y},$$

то мають місце наступні теореми.

Теорема 1. *Для стійкості лінійної однорідної системи* (2) *необхідно й достатньо, щоб її фундаментальна матриця $Y(x)$ була обмеженою на $[a, \infty)$, тобто*

$$\exists K > 0 \colon \|Y(x)\| < K \ \forall x \geq a.$$

Теорема 2. *Для асимптотичної стійкості лінійної однорідної системи* (2) *необхідно й достатньо, щоб норма її фундаментальної матриці прямувала до нуля при $x \to \infty$.*

Проблему стійкості системи

$$y = Ay, \tag{3}$$

де A – стала матриця коефіцієнтів, повністю розв'язує така теорема.

Теорема 3. *Для того, щоб система* (3) *була стійкою, необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх власних чисел матриці A були недодатними, причому кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідало стільки лінійно незалежних власних векторів, якою є кратність цього числа як кореня характеристичного полінома $P(X) = |A - XE|$* (*тобто кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідали лише одновимірні клітини Жордана в нормальній формі матриці A*).

Для асимптотичної стійкості системи (3) *необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх власних чисел матриці A були від'ємними.*

Розглянемо приклади

Приклад 1. Знайти всі значення параметрів α та β, для яких система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_1 - \alpha x_2 - x_3; \end{cases}$$

є а) стійка; б) асимптотично стійка.

<u>Розв'язання</u>

Розглянемо матрицю коефіцієнтів системи $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1 & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1 \end{pmatrix}$.

З характеристичного рівняння $|A - kE| = 0$ знаходимо власні числа

$$\begin{vmatrix} -1-k & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1-k & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1-k \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(1+k)^3 - \beta^2(1+k) - 2\alpha^2(1+k) = 0.$$

Звідси отримуємо, що $k_1 = -1, k_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{\beta^2 + 2\alpha^2}$.

Тоді, оскільки $\mathrm{Re}k_i = -1 < 0$ (дійсні частині усіх власних чисел менші за модулем), то за теоремою 3 для кожної пари елементів α та β:

а) система (2) стійка у додатному напрямі;

а) система (2) асимптотично стійка за Ляпуновим у додатному напрямі.

Приклад 2. Для кожного значення параметра a дослідити на стійкість в обох напрямках розв'язки заданої системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{4}$$

<u>Розв'язання</u>

Зайдемо власні значення і відповідні їм власні вектори матриці коефіцієнтів системи $A = \begin{pmatrix} a & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ в залежності від значення параметра a.

$$|A - kE| = \begin{vmatrix} a-k & 5 \\ -1 & 2-k \end{vmatrix} = (a-k)(2-k) + 5 = k^2 - (a+2)k + 2a + 5 = 0,$$

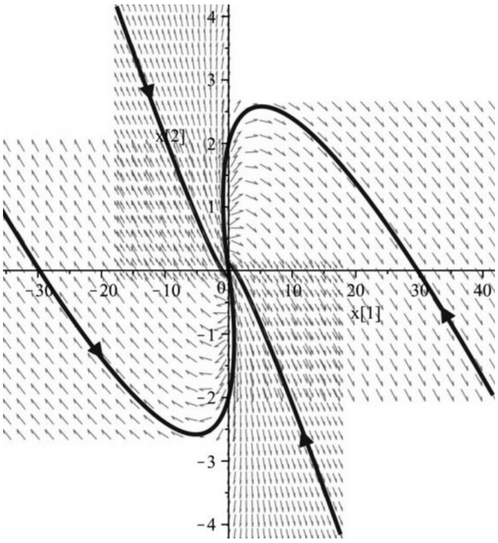
$$k_{1,2} = \frac{a + 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a - 16}}{2}.$$

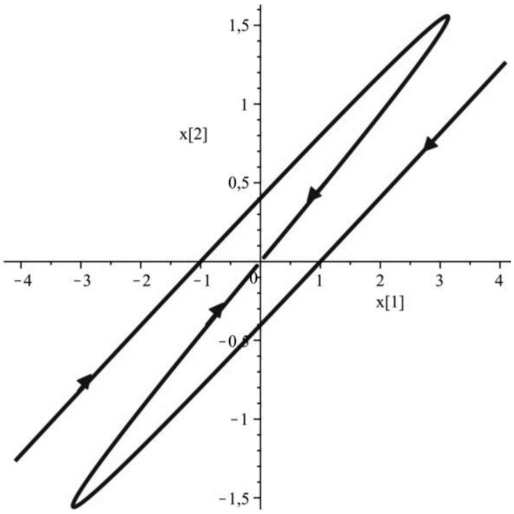
Розглянемо усі можливі випадки:

1) $k_{1,2} \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 - 4a - 16 \geq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty; 2 - 2\sqrt{5}\right] \cup [2 + 2\sqrt{5}; +\infty)$.

1.1) $k_1 = k_2 \Rightarrow a = 2 \pm 2\sqrt{5}$. Тоді для значення $a = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ система (4) буде нестійка при $t \to +\infty$ і стійка при $t \to -\infty$, а для значення $a = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ навпаки.

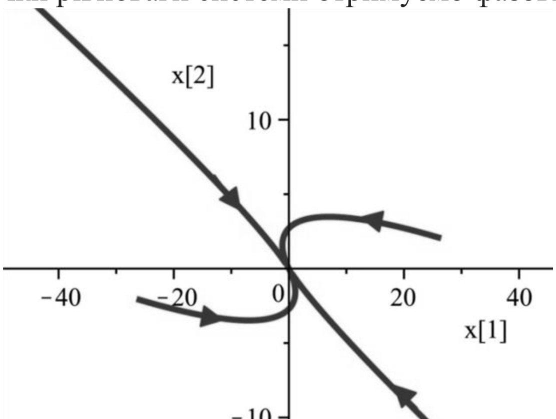
Фазовий портрет системи (вироджений вузол) для отриманих значень параметра a має відповідно вигляд:





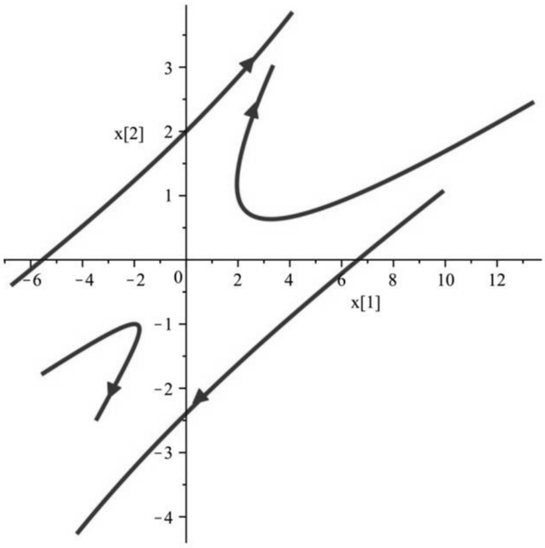
1.2) $k_{1,2} > 0 \Rightarrow a + 2 > \sqrt{a^2 - 4a - 16} \Rightarrow a > -2 \Rightarrow a \in (2 + 2\sqrt{5}; +\infty)$. Тоді система (4) буде нестійка при $t \to +\infty$ і стійка при $t \to -\infty$.

В околах довільної точки рівноваги системи отримуємо фазовий портрет – вузол:



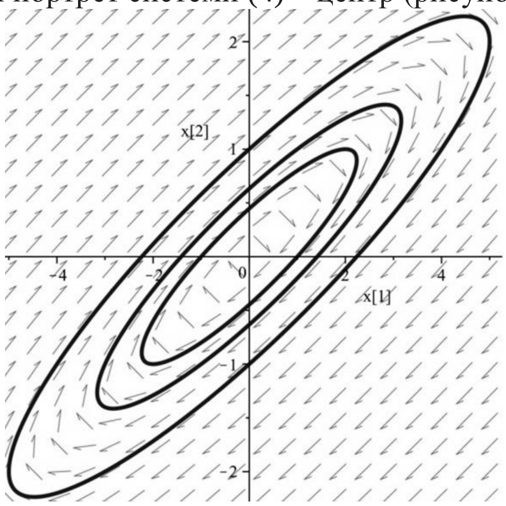
1.3) $k_1 \cdot k_2 < 0 \Rightarrow a + 2 < \sqrt{a^2 - 4a - 16} \Rightarrow a \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{5})$. Тоді система (4) буде нестійкою в обох напрямках.

В околах довільної точки рівноваги системи отримуємо фазовий портрет – типу сідло. Фазовий портрет зображено на рисунку нижче.

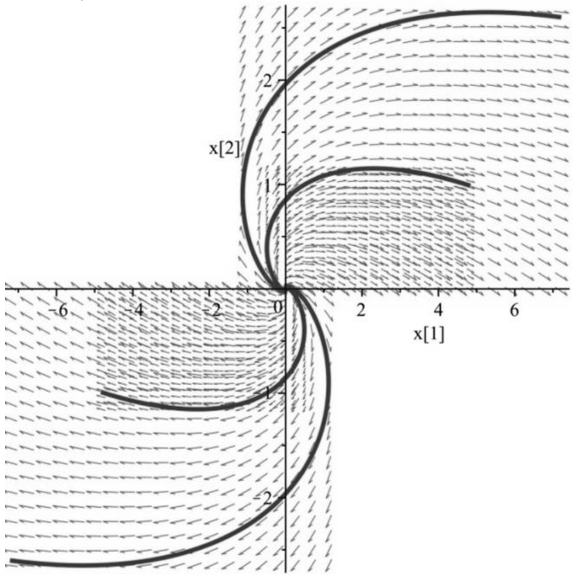


2) $k_{1,2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow a \in (2-2\sqrt{5}; 2+2\sqrt{5})$.

2.1) якщо $a=-2$, то $\mathrm{Re}k_{1,2}=0$. Тоді дана система є стійкою в обох напрямках (але не асимптотично). Фазовий портрет системи (4) – центр (рисунок зображено нижче).



2.2) якщо ж $a \in (2-2\sqrt{5}; -2) \cup (-2; 2+2\sqrt{5})$, то фазовий портрет системи – фокус (сукупність спіралей). Рисунок ниже:



При $a \in (2 - 2\sqrt{5}; -2)$ система (4) буде стійка (причому асимптотично) у додатному напрямку і нестійка – у від'ємному.

Список використаних джерел

1. Murray R. M. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation / R. M. Murray,. Z. Li, S. S. Sastry – California: CRC Press,1994. – 456 p.

2. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник (2-ге вид., перероб. і доп.). / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

Анотація. Блещенко Н. Дослідження стійкості за Ляпуновим систем диференціальних рівнянь. *У статті наведено основні означення й факти з теорії стійкості руху за О. М. Ляпуновим. Розглянуто критерії стійкості лінійних однорідних систем звичайних диференціальних рівнянь, зокрема зі сталими коефіцієнтами. Наведено чисельні приклади застосування якісної теорії диференціальних рівнянь до дослідження систем на стійкість.*

Ключові слова: *теорія стійкості руху за О. М. Ляпуновим, стійкий розв'язок системи, асимптотична стійкість, фазовий портрет.*

Abstract. Bleshchenko N. Investigation of Lyapunov stability of systems of differential equations. *The article gives the basic definitions and facts on the theory of A. M. Lyapunov stability. The criteria of stability of linear homogeneous systems of ordinary differential equations, in particular, with constant coefficients, are considered. Numerous examples of the application of qualitative theory of differential equations to the study of stability systems are given.*

Key words*: the theory of A. M. Lyapunov stability, stable solution of the system, asymptotic stability, phase portrait.*

Змієнко Михайло

Студента 4 курсу, напряму підготовки «Математика»*

exypret@gmail.com

Науковий керівник - В.Д. Погребний

СИСТЕМИ ПОДВІЙНИХ ТА ДУАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Побудуємо числову систему із виразу виду $(a + bi)$ визначив додавання наступним виразом:$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Спробуємо визначити множення. Вимоги: 1) Множення дійсного числа $a = a + 0i$ на число $z = b + ci$ має давати результат узгоджений з випадком комплексних чисел - $(a + 0i)(b + ci) = ab + aci$ та $(b + ci)(a + 0i) = ab + aci$, і цим самим виконується і умова для множення дійсних чисел - $(a + 0i)(b + 0i) = ab + 0i$. Зауважмо, що оскільки і для додавання виконується $(a + 0i) + (b + 0i) = ab + 0i$, то дійсні числа є підсистемою нової системи; 2) Виконується рівність - $(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1z_2)$; 3) Лівий та правий дистрибутивний закон множення відносно додавання - $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ та $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$. З цих вимог слідує, що - $(a+bi)(c+di)=a(c+di)+(bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$. Залишилося вказати чому саме дорівнює i^2. Прийнявши $i^2=-1$ отримуємо множення комплексних чисел. Але це не єдиний можливий варіант. Досить щоб $i*i$ належало розглянутій системі, тобто мало вигляд - $p+qi$. Отримуємо - $(a+bi)(c+di)=(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i,$ де $i=p+qi, p\ q$- два фіксовані числа.

Легко перевірити що для нової системи виконується комутативний та асоціативний закон відносно множення - $z_1z_2=z_2z_1-(a+bi)(c+di)=(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i;\ (c+di)(a+bi)=ca+dbp+(cb+da+dbq)i$ та $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)-\ [(a+bi)(c+di)](e+fi)=[(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i](e+fi)=\big((ac+bdp)e+(ad+bc+bdq)fp\big)+\big((ac+bdp)f+(ad+bc+bdq)e+(ad+bc+bdq)fq\big)i;(a+bi)[(c+di)(e+fi)]=(a+bi)[(ce+dfp)+(cf+de+dfq)i]=(a(ce+dfp)+b(cf+de+dfq)p)+(a(cf+de+dfq)+b(ce+dfp)+b(cf+de+dfq)q)i.$

Отже над полем дійсних чисел будь-яка система чисел виду $a+bi$ з правилами дій: 1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$; 2) $(a+bi)(c+di)=(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i,$ де $i=p+qi$, відповідає одній з 3х: 1) *комплексних чисел* $a+bi, i^2=-1$; 2) *подвійних чисел* $a+b\varepsilon, \varepsilon^2=1$; 3) *дуальних чисел* $a+be, e^2=0$. Покажемо що це єдині можливі результати. Із рівності $i^2=p+qi$ маємо $i^2-qi=p$. Виконавши перетворення - $(i-\frac{q}{2})^2=p+\frac{q^2}{4}$. Можливі три і тільки три випадки: 1) $p+\frac{q^2}{4}$ – від'ємне число, тобто $p+\frac{q^2}{4}=-k^2$, k – відмінне від нуля дійсне число. Тоді $(i-\frac{q}{2})^2=-k^2$. Поділивши на k^2отримуємо - $(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i)^2=-1$. Перепозначив число в дужках на i маємо - $i^2=-1$. Фактично маємо систему *комплексних* чисел; 2) $p+\frac{q^2}{4}$ – додатне число, тобто $p+\frac{q^2}{4}=k^2$. Тоді отримаємо $(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i)^2=1$. Перепозначив число в дужках на ε отримаємо $\varepsilon^2=1$ маємо систему *подвійних* чисел; 3) $p+\frac{q^2}{4}=0$. В цьому випадку перепозначив дужки на *e* матимемо $e^2=0$ – система *дуальних* чисел. [3]

По аналогії з комплексними числами вводяться формули додавання, множення; означення модуля.

Дуальні числа – це пари дійсних чисел (a, b) для яких правила дій визначенні формулами: (1) $\begin{cases}(a+b\varepsilon)+(c+d\varepsilon)=(a+c)+(b+d)\varepsilon,\\ (a+b\varepsilon)-(c+d\varepsilon)=(a-c)+(b-d)\varepsilon\\ (a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)=ac+(ad+bc)\varepsilon.\end{cases}$

Число $\bar{z}=a-b\varepsilon$ – називають спряженим до числа $z=a+b\varepsilon$(и навпаки). $\bar{z}z=(a-b\varepsilon)(a+b\varepsilon)=a^2(2)$, a^2 називають модулем дуального числа, і позначають $|z|$. Сума двох спряжених $\bar{z}+z=(a-b\varepsilon)+(a+b\varepsilon)=2a$ – дійсне число, $\bar{z}-z=(a-b\varepsilon)-(a+b\varepsilon)=2b\varepsilon$ – чисто уявне число. Формули $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}, \overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}, \overline{z_1}\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}, \overline{z_1}:\overline{z_2}=\overline{z_1:z_2}(3)$ – виконуються для дуальних чисел.

Правило ділення на дуальне число записується у наступному вигляді: $\frac{c+d\varepsilon}{a+b\varepsilon}=\frac{(c+d\varepsilon)(a-b\varepsilon)}{(a+b\varepsilon)(a-b\varepsilon)}=\frac{ca+(-cb+da)\varepsilon}{a^2}=\frac{c}{a}+\frac{-cb+da}{a^2}\varepsilon(4)$. Отже для того щоб була можливість ділення на дуальне число необхідно, щоб $|z| = a$ цього числа був відмінним від нуля; при цьому, на відміну від комплексних чисел, дуальне число нульового модуля може бути відмінним від нуля. Для випадків ділення на нуль, вважатимемо що $\frac{1}{\varepsilon}$ та $\frac{1}{0}$ – числа, які позначимо через ω та ∞. Введемо числа виду $c\omega$, де $c \neq 0$ – дійсне. Тоді будь-яке дуальне число матиме собі обернене - $\frac{1}{b\varepsilon} = \frac{1}{b}\omega$ при $b \neq 0; \frac{1}{0} = \infty$. Правила дій для символу ∞ - визначенні наступними формулами: $z + \infty = \infty, z - \infty = \infty, z\infty = \infty, \frac{\infty}{z} = \infty, \frac{z}{\infty} = 0.$ (5) Правила дій над числами $a\omega$ визначенні наступними формулами: (6)

$$\begin{cases} (a + b\varepsilon) + c\omega = c\omega, \\ (a + b\varepsilon) - c\omega = (-c)\omega, \\ (a + b\varepsilon)c\omega = ac\omega, \\ \frac{c\omega}{a+b\varepsilon} = \frac{c}{a}\omega, \\ \frac{a+b\varepsilon}{c\omega} = \frac{a}{c}\varepsilon, \\ c\omega \pm d\omega = (c \pm d)\omega, \\ c\omega d\omega = \infty. \end{cases}$$

Покладемо, $\overline{c\omega} = -c\omega, \overline{\infty} = \infty (6a)$. Тоді для розширеної системи дуальних чисел із $c\omega$ та ∞ виконуються рівності (3).

Число $c\varepsilon$ нульового модуля характеризується тип, що існує відмінне від нуля дуальне число *z*, рівне $d\varepsilon$, добуток якого на число $c\varepsilon$ рівний: $c\varepsilon d\varepsilon = (cd)\varepsilon^2 = 0 (7)$- числа такого виду називаються *дільники нуля*.

Дуальні числа ненульового модуля a можна записати в формі, близькій до тригонометричної форми комплексного числа: $a + b\varepsilon = \left(a + \frac{b}{a}\varepsilon\right) = r(1 + \varepsilon\varphi), (8)$ $r = a$ – модуль числа $z = a + b\varepsilon$, а відношення $\frac{b}{a} = \varphi$ – аргумент числа і позначається по аналогій із комплексними числами *Arg z* (r – довільне дійсне число, відмінне від нуля; φ – довільне дійсне число). Спряжені дуальні числа мають однаковий модуль и протилежні аргументи.

Форма (8) запису дуальних чисел зручна для виконання дій множення або ділення: $r_1(1 + \varepsilon\varphi_1)r_2(1 + \varepsilon\varphi_2) = r_1r_2(1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_1\varphi_2) = r_1r_2 = (1 + \varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2).$ (9) – отже модуль добутку двох дуальних чисел рівний добутку модулів множників, а аргумент – сумі аргументів. Звідси маємо, що модуль частки двох дуальних чисел рівний частці модулів, а аргумент частки – різниці аргументів: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2(1+\varepsilon\varphi_2)}{r_1(1+\varepsilon\varphi_1)} = \frac{r_2}{r_1}(1 + \varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1).$ (10)

Також можна отримати закони, які дозволяють підносити дуальні числа в степінь та добувати корінь: (11) $\begin{cases} (r(1 + \varepsilon\varphi)^n = r^n(1 + \varepsilon n\varphi), \\ \sqrt[n]{r(1 + \varepsilon\varphi)} = \sqrt[n]{r}(1 + \varepsilon\frac{\varphi}{n}) \end{cases}$

Із (11) маємо що корінь непарної степені, при $r \neq 0$ визначається однозначно; непарної існує якщо $r < 0$ і має 2 значення і якщо $r > 0$.

В повній аналогії з вказаним вище можемо описати систему подвійних чисел. *Подвійні числа* - це пари дійсних чисел (a, b) для яких правила дій визначенні формулами:

$$(12)\begin{cases} (a+be) \pm (c+de) = (a \pm c) + (b \pm d)e, \\ (a+be)(c+de) = (ac+bd) + (ad+bc)e, \\ \frac{c+de}{a+be} = \frac{(c+de)(a-be)}{(a+be)(a-be)} = \frac{(ca-db)+(-cb+da)e}{a^2-b^2} = \frac{ca-db}{a^2-b^2} + \frac{-cb+da}{a^2-b^2}e. \end{cases}$$

Аналогічно спряженим число до *z* є число $\bar{z}$, виду $z = a + be, \bar{z} = a - be$. Сума та добуток подвійних чисел: $z + \bar{z} = 2a\ z\bar{z} = a^2 - b^2$ – числа дійсні. Модуль $|z| = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ – знак якого співпадає із знаком із знаком більшого по абсолютній величенні дійсного числа *a* та *b*. Для подвійних чисел залишаються дійсними формули (3).

Ділення на число $z = a + be$ можливо лише в тих випадках, коли $|z| = \sqrt{|a^2 - b^2|} \neq 0$. Подвійні числа $a \pm ae$, модуль яких рівний нулю, називаються дільниками нуля:$(a + ae)(b - be) = ab(1 + e)(a - e) = 0$. Знову введемо числа $\frac{1}{1+e} = \omega_1, \frac{1}{1-e} = \omega_2, \frac{1}{0} = \infty$. Введемо додатково добутки $c\omega_1$та $c\omega_2$, де *c* – будь-яке дійсне число; $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1-e}{1+e} = \sigma_1$і $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1+e}{1-e} = \sigma_2$. Правила дій над символами $c\omega_1, c\omega_2, \infty, \sigma_1, \sigma_2$- визначаються формулами (5) та відношеннями виду :

$$(13)\begin{cases} (a+be) \pm c\omega_1 = (\pm c)\omega_1, \\ (a+be)c\sigma_2 = (a+b)c\sigma_2, \\ \frac{a+be}{c\omega_2} = \frac{a-b}{c}(1-e), \\ \frac{c+be}{c\sigma_1} = \frac{a-b}{c}\sigma_2, \\ a\omega_1 b\omega_2 = \infty, \\ a\omega_1 b\sigma_2 = ab\omega_2, \\ a\omega_1 b\omega_1 = \frac{ab}{2}\omega_1. \end{cases}$$

Покладемо, $\overline{c\omega_1} = c\omega_2, \overline{c\omega_2} = c\omega_1, \overline{\sigma_1} = \sigma_2, \overline{\infty} = \infty$(13a). З чого випливає що для розширеної системи подвійних чисел виконуються рівності (3).

Подвійні числа ненульового модуля можна також записати у вигляді (8) запису дуальних чисел. Нехай $r = \pm\sqrt{|a^2 - b^2|}$ – модуль подвійного числа $|z|$. Отримаємо: $z = a + be - r\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}e\right)$. Із означення модуля маємо, що $(\frac{a}{r})^2 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \pm 1$. Із властивостей гіперболічних функцій можемо отримати $\frac{a}{r} = ch\varphi, \frac{b}{r} = sh\varphi$ або $\frac{a}{r} = sh\varphi, \frac{b}{r} = ch\varphi$, (14) де φ – деяке число задане формулами (14).

Таким чином отримали $z = r(ch\varphi + esh\varphi); z = r(sh\varphi + ech\varphi)$. (15), φ – аргумент подвійного числа, і позначається *Arg z*.

Форма (15) запису подвійних чисел зручна в тих випадках, коли потрібно виконувати дій над кількома подвійними числами:

$$(16)\begin{cases} r_1(ch\varphi_1 + esh\varphi_1)r_2(ch\varphi_2 + esh\varphi_2) = r_1r_2(ch(\varphi_1+\varphi_2) + esh(\varphi_1+\varphi_2), \\ r_1(sh\varphi_1 + ech\varphi_1)r_2(sh\varphi_2 + ech\varphi_2) = r_1r_2(ch(\varphi_1+\varphi_2) + esh(\varphi_1+\varphi_2), \\ r_1(ch\varphi_1 + esh\varphi_1)r_2(sh\varphi_2 + ech\varphi_2) = r_1r_2(sh(\varphi_1+\varphi_2) + ech(\varphi_1+\varphi_2). \end{cases}$$

Модуль добутку двох подвійних чисел дорівнює добутку модулів множників, а аргумент добутку – сумі аргументів. Із формул (16) можемо отримати правила ділення подвійних чисел: (17) $\begin{cases} \frac{r_2(ch\varphi_2+esh\varphi_2)}{r_1(ch\varphi_1+esh\varphi_1)} = \frac{r_2(sh\varphi_2+ech\varphi_2)}{r_1(sh\varphi_1+ech\varphi_1)} = \frac{r_1}{r_2}\left(ch(\varphi_2-\varphi_1)+esh(\varphi_2-\varphi_1)\right), \\ \frac{r_1(sh\varphi_2+ech\varphi_2)}{r_1(ch\varphi_1+esh\varphi_1)} = \frac{r_1(ch\varphi_2+esh\varphi_2)}{r_1(sh\varphi_1+ech\varphi_1)} = \frac{r_1}{r_2}\left(sh(\varphi_2-\varphi_1)+ech(\varphi_2-\varphi_1)\right) \end{cases}$

Із формул (16) можна отримати правила піднесення подвійного числа до натурального показника та добування кореня: $(r(ch\varphi + esh\varphi))^n = r^n(ch(n\varphi) + esh(n\varphi)$; [1,2]

$$(r(sh\varphi + ech\varphi))^n = \begin{cases} r^n(sh(n\varphi) + ech(n\varphi) - n \text{ непарне} \\ r^n(ch(n\varphi) + esh(n\varphi) - n \text{ парне} \end{cases};$$

$$\sqrt[n]{r(ch\varphi + esh\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(ch\frac{\varphi}{n} + esh\frac{\varphi}{n}\right), n - \text{непарне;} \\ \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(ch\frac{\varphi}{n} + ech\frac{\varphi}{n}\right), \\ \sqrt[n]{r}\left(sh\frac{\varphi}{n} + ech\frac{\varphi}{n}\right), \end{cases} n - \text{парне;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{r(sh\varphi + ech\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(sh\frac{\varphi}{n} + ech\frac{\varphi}{n}\right), n - \text{непарне} \\ \text{не існує при } n \text{ парному} \end{cases}$$

Список використаних джерел

1. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. – М.: Физматгиз, 1963
2. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения. – М.: Наука, 1979
3. Канто И.Л. Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа – М.: Наука, 1973

Анотація. Змієнко М. Системи подвійних та дуальних чисел. *У статті розглянуті алгебри з рангом ділення 2 над полем дійсних чисел. Введені означення подвійних та дуальних чисел. Визначені операції додавання, множення, віднімання та ділення зазначених чисел. Введені означення модуля та спряженого числа, правила ділення на дуальні та подвійні числа. Представлена форма запису близька до тригонометричної. Правила піднесення до степені та добування кореня n-натурального.*

Ключові слова: *математика, алгебра, алгебраїчне розширення, дуальні числа, подвійні числа, комплексні числа, алгебри з рангом ділення 2, гіперкомплексні числа*

Abstract. Zmienko M. Systems of dual and double numbers. *In the article reviewed algebras with rank of division 2 over the field of real numbers. Double and dual numbers were introduced. Specified operations of the addition, multiplication, subtraction and division. Introduced module and conjugate notation rules, division rules for dual and double numbers. The presented form of the recording is close to trigonometric. Rules of powered and extraction of the root for n-natural.*

Keywords: *mathematics, algebra, algebraic extension, dual numbers, double numbers, complex numbers, algebras with rank of division 2, hypercomplex numbers.*

Кондик Юлія
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
kondik2016@ukr.net
Науковий керівник – О. О. Одінцова

ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД НАПОВНЕННЯ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ У СТАРШІЙ ШКОЛІ

З перетворенням України на самостійну державу освіта стала власною справою українського народу. Розглянемо, як саме змінювалася і продовжує змінюватися ця сфера, особливу увагу звернемо щодо питань вивчення математики в старшій школі, а саме змістової лінії рівнянь і нерівностей в курсі алгебри і початків аналізу.

У 1991 році Україна успадкувала від СРСР потужну розгалужену освітню систему з передовою на той час інфраструктурою, яка, відповідно до Постанови Центрального Комітету Компартії України і Ради Міністрів Української РСР від 10 липня 1984 року, вже мала нову структуру загальноосвітньої школи, зокрема включала і 11 клас, нові навчальні плани, програми. В подальші роки відбулося екстенсивне використання матеріально-технічних, кадрових і організаційних ресурсів попередньої системи та пристосування їх до потреб незалежної держави [7].

У 1999 році Закон України «Про загальну середню освіту» задекларував перехід до 12-річної повної середньої освіти. За навчальною програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів вивчення змістової лінії рівнянь і нерівностей в курсі алгебри і початків аналізу передбачалось в 12 класі – «Рівняння, нерівності та їх системи» (16 год.). Зміст навчального матеріалу з цієї теми включав: основні види рівнянь з однією змінною, загальні методи їх розв'язування: розкладання на множники, заміна невідомої, функціональні методи, нерівності з однією змінною, їх види, методи розв'язування, системи рівнянь, їх види, методи розв'язування. В результаті учні мали вміти розрізняти класи рівнянь, нерівностей, їхніх систем, методи їх розв'язування, застосовувати загальні методи до розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, розв'язувати задачі, які зводяться до рівнянь. В 10 класі вивчались найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності, в 11 класі – найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Проте це прогресивне рішення було ухвалено без попередніх публічних дискусій і з'ясування позицій основних дійових осіб освітнього процесу, методом «реформи згори». Тому за даними соціологічного опитування Інституту соціальної та політичної психології Національної Академії педагогічних наук України у 2010 році 70% респондентів висловили негативне ставлення до впровадження 12-річної повної середньої освіти і в тому ж році Верховна Рада ухвалила закон про внесення змін до законодавчих актів з питань загальної середньої та дошкільної освіти (щодо організації навчального процесу)» і про повернення до 11-річної повної середньої освіти [2].

Чинними з того часу і до сьогодення є навчальні програми з математики чотирьох рівнів: стандарту, академічного, профільного та для класів з поглибленим вивченням математики, які дещо змінювалися, але ці зміни стосувались здебільшого порядку вивчення тем та класів, в яких вони вивчались (в 10 чи 11 класі) [1]. Основні відмінності вивчення математики цих рівнів полягають у змісті навчального матеріалу – відрізняється не лише його обсяг, який мають опанувати учні, а й рівень його обґрунтованості, абстрактності, загальності, прикладної спрямованості, а також у вимогах до навчальних досягнень.

Окремого часу на вивчення теми «Рівняння, нерівності та їх системи» на рівні стандарту не виділено, але все ж таки повторення загальних методів розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем відбувається, бо ці знання є необхідними при розв’язуванні найпростіших тригонометричних, показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей.

На академічному рівні порівняно з рівнем стандарту теоретичний рівень навчання суттєво підвищується, зокрема при вивченні рівнянь, нерівностей та їх систем акцентується увага на основних поняттях: корінь, розв’язок, рівносильність, наслідок, можливість втрати та появи сторонніх коренів, перевірка як важлива складова процесу розв’язування.

До змісту навчального матеріалу теми «Функції, рівняння і нерівності» (12 год.) в 10 класі входять рівносильні перетворення рівнянь, рівняння-наслідки, застосування властивостей функцій до розв’язування рівнянь, рівносильні перетворення нерівностей, метод інтервалів. Передбачається, що після його вивчення учні будуть вміти застосовувати властивості функцій до розв’язування рівнянь і нерівностей, пояснювати зміст понять «рівносильні перетворення рівнянь та нерівностей», «рівняння-наслідки», використовувати їх при розв’язуванні рівнянь та нерівностей. У наступних темах вивчаються нескладні ірраціональні рівняння, найпростіші тригонометричні рівняння, основні способи їх розв’язування, найпростіші тригонометричні нерівності, в 11 класі – показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Навчання математики за математичним, фізичним та фізико-математичним профілями передбачає поглиблену підготовку учнів з математики, що забезпечує неперервність навчання при переході з основної до старшої школи. Тому важливо, щоб учні швидко орієнтувалися та знаходили правильні і оптимальні методи розв’язування квадратних рівнянь, неповних квадратних рівнянь, рівнянь, що зводяться до квадратних, зокрема добре засвоїли метод заміни змінної, вміли розв’язувати квадратні рівняння з параметрами, розкладати квадратний тричлен на лінійні множники. Після вивчення рівнянь з двома змінними та їх систем в учнів мають сформуватися не лише конкретні навички розв’язування, а й математична культура щодо таких понять, як рівносильність систем рівнянь, система, що є наслідком даної. Невід’ємною частиною засвоєного учнями математичного апарату має стати обґрунтування правомірності перетворень під час розв’язування систем, відстеження рівносильності або навпаки, звуження чи розширення множини розв’язків

Першою темою вивчення математики в 10 класі є «Функції, многочлени, рівнянні нерівності» (40 год.), зміст якої доповнюється: рівняння і нерівності, що містять знак модуля, рівняння і нерівності з параметрами, графік рівняння з двома змінними, нерівність з двома змінними, графік нерівності з двома змінними, системи рівнянь і нерівностей. У результаті учні мають навчитися застосовувати властивості функцій та многочленів до розв’язування рівнянь і нерівностей, розв’язувати нерівності за допомогою методу інтервалів, рівняння і нерівності, які містять знак модуля і параметри, будувати нескладні графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними. Зміст навчального матеріалу інших тем також розширюється, додаються ірраціональні рівняння, ірраціональні нерівності, нерівності з параметрами, тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами, рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.

В 11 класі в процесі вивчення визначених програмою тем учні навчаються застосовувати результати дослідження функцій за допомогою похідної до розв’язування рівнянь і нерівностей та до доведення нерівностей, розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами. Зміст навчального матеріалу останньої теми – «Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація» (20 год.) охоплює: методи розв’язування рівнянь та нерівностей з однією змінною (рівносильні перетворення, заміна змінної, застосування властивостей функцій, метод інтервалів тощо), системи рівнянь та методи їх розв'язування. Вимоги до навчальних досягнень учнів наступні: розрізняють класи рівнянь, нерівностей, їх систем, методи їх розв'язування, обґрунтовують рівносильність виконаних перетворень, застосовують загальні методи та прийоми до розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, розв'язують рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей з параметрами.

Навчальна програма для класів з поглибленим вивченням математики, яка передбачає початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу і тим самим також забезпечує зв'язок з основною школою, містить ще більш доповнений та глибокий зміст навчального матеріалу, що, з одного боку, сприяє кращому розумінню учнями значення математики як науки, усвідомленню ними універсальності математичних знань, необхідності повнішого і свідомого володіння математичними методами, а з іншого – формуванню у школярів природничих знань як цілісної системи. Змістова лінія рівнянь і нерівностей пронизує майже кожну тему, додаються системи ірраціональних рівнянь, ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи з параметрами, системи тригонометричних рівнянь, показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами, можливе вивчення многочленів третього степеня, рівнянь вищих степенів, формули Кардано.

З 2018 року навчальну програму академічного рівня вилучили. Кардинальних змін на інших рівнях не відбулося, лише дещо змінився порядок вивчення тем по класах. Варто зазначити, що цей навчальний матеріал є дуже важливим, адже використовується для складання тестів ЗНО. Зокрема завдання ЗНО 2018-2019 років, як пробного варіанту, так і основної сесії, першої частини містять нескладні раціональні, дробово-раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні рівняння та нерівності, рівняння з модулем, системи рівнянь, в третій частині обов'язково наявне рівняння або нерівність з параметром.

Зрозуміло, що з Новою українською школою навчальні програми як з математики, так і з інших предметів докорінно зміняться. Адже старша школа планується бути профільною з двома спрямуваннями: академічного, із поглибленим вивченням окремих предметів з орієнтацією на продовження навчання в університетах, та професійного, яке поряд із здобуттям повної загальної середньої освіти забезпечить отримання першої професії (яка не обмежуватиме можливість продовження освіти). Всі ці зміни мають підвищити доступність якісної, конкурентоспроможної освіти відповідно до вимог інноваційного сталого розвитку суспільства та забезпечити особистісний розвиток людини згідно з її індивідуальними здібностями, потребами, на основі навчання протягом життя. Цьому сприятиме і математична компетентність – культура логічного і алгоритмічного мислення, уміння застосовувати математичні (числові та геометричні) методи для вирішення прикладних завдань у різних сферах діяльності, здатність до розуміння і використання простих математичних моделей, уміння будувати такі моделі для вирішення проблем, яка є однією з перших серед десяти ключових компетентностей Нової української школи [3]. Тому математика була, є й буде одним з основних предметів будь-якого загальноосвітнього навчального закладу.

Список використаних джерел

1. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. II. Профільне навчання / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – 384 с. – (Факультативи та курси за вибором).

2. Касьянов Г. В. Освітня система України 1990 – 2014 Аналітичний огляд. / Г. В. Касьянов // Благодійний фонд «Інститут розвитку освіти» – К.: ТАКСОН, 2015. – 52 с.

3. Концепція Нової української школи. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf.

4. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

5. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

6. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

7. Про дальше вдосконалення загальної середньої освіти молоді і поліпшення умов роботи загальноосвітньої школи: постанова Центрального Комітету Компартії України і Ради Міністрів Української РСР від 10 липня 1984 року № 281 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://search.ligazakon.ua/l_doc2.nsf/link1/KP840281.html.

8. Про Національну стратегію розвитку освіти в Україні на період до 2021 року: указ Президента України від 25 червня 2013 року № 344/2013 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/344/2013.

Анотація. Кондик Ю. Історичний огляд наповнення змістової лінії рівнянь та нерівностей в старшій школі. *У статті проаналізовано особливості вивчення змістової лінії рівнянь та нерівностей в старшій школі за навчальними програмами різних років. Зазначено відмінності між навчальними програмами різних рівнів, а також зміни, які відбулися в 2018/2019 н. рр.. та зміни, які ще планують впровадити.*

Ключові слова: *рівень стандарту, академічний рівень, профільний рівень, поглиблене вивчення, Нова українська школа.*

Abstract. Kondyk Y. The historical overview of the content line of equations and inequalities in high school's occupancy. *There are analyzed the peculiarities of studying the content line of equations and inequalities in the high school by the curricula of different years in this article. Differences between educational programs at different levels and also the changes that took place in 2018/2019 and which are planning to introduce are noted.*

Keywords: *level of standard, academic level, profile level, in-depth study, New Ukrainian School.*

Лубенець Зоряна
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
zorianalubenets@gmail.com
Науковий керівник− О.В. Мартиненко

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У сучасній математиці функціональний аналіз є одним із фундаментальних напрямків. Його важливою особливістю є те, що він дозволяє поєднувати і одночасно досліджувати різні, на перший погляд, питання. Зокрема, вивчення функціональних рівнянь $F(x)=y$ дає можливість об'єднати дослідження обчислення диференціальних і інтегральних рівнянь, граничних задач та нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Методи функціонального аналізу виявились досить ефективними при постановці та дослідженні задач щодо повноти систем функцій та розв'язуванні граничних задач у певному класі функцій [4, с.7-8].

Варто зауважити, що функціональний аналіз застосовується в теоретичній фізиці, математичній фізиці, в прикладному аналізі та інших областях математики.

На сучасному етапі досить широко використовуються можливості комп'ютерних технологій, створення яких сприяло і продовжує сприяти розвитку обчислювальної математики, яка, з одного боку, присвячена створенню і дослідженню (із застосуванням функціонального аналізу, статистики і інших розділів математики) наближених методів обчислення задач і, з іншого боку, розвитку програмування й алгоритмічних мов [5, с.5].

Багато задач обчислювальної математики можна звести до відшукання нерухомої точки відображення, для цього використовують метод послідовних наближень (метод ітерацій). У свою чергу принцип стискаючих відображень, окрім доведення існування та єдиності розв'язків рівняння $f(x)=x$ (f – відображення), дає фактичний метод наближеного знаходження такого розв'язку − метод послідовних наближень [8, с.100].

Метод стискаючих відображень використовується в алгебрі, геометрії, фізиці, медицині, інформатиці та у теорії фракталів тощо. Розглянемо сучасне застосування цього методу, зокрема, в ядерній медицині. Ядерна медицина − це розділ медичної радіології, який використовує радіонукліди та іонізуючі випромінювання для дослідження функціонального і морфологічного стану організму, а також для лікування захворювань людини.

Відомо, що діагностика і лікування різних захворювань неможливі без використання рентгенівських апаратів, потужних гамма-терапевтичних установок, прискорювачів електронів, протонів та інших елементарних частинок, синтезованих радіоактивних ізотопів – джерела іонізуючих випромінювань різного типу, радіонукліди медичного призначення та радіоактивні фармацевтичні препарати [1, с.4]. Сучасна медична техніка дозволяє виявити структурні і функціональні зміни одного і того ж органу за допомогою приладів, які мають різний принцип дій. Найбільш інформаційним методом є томографія, яка надає більше інформації про об'єкт дослідження, ніж інші відомі методи діагностики. Існує декілька видів томографії: рентгенівська, електронно-променева, магнітно-резонансна, позитронно-емісійна, ультразвукова, оптична когерентна томографія та інші. Інформативність і достовірність кожного з них залежить від багатьох чинників, що визначають кінцевий результат дослідження, зокрема й від принципу дії пристрою [7, с.5].

Розглянемо специфіку використання методу стискаючих відображень для реконструкції зображень у комп'ютерній томографії. При томографічному дослідженні ставиться математична задача відновлення внутрішньої структури об'єкта за його проекціями − цифровими знімками, зробленими з різних точок. Її розв'язування зводиться до пошуку перетворення, оберненого до перетворення Йоганна Радона (16 грудня 1887 р. − 25 травня 1956 р.) − австрійський математик. При цьому складають систему операторних рівнянь першого роду, наближені розв'язки якої знаходять за допомогою методу регуляризації.

Даний метод відносять до ітераційних методів обчислювальних алгоритмів. Ітераційні методи відновлення зображення використовують апроксимацію відновлюваного об'єкта масивом комірок рівної щільності, що являють собою невідомі величини, пов'язані системою алгебраїчних рівнянь, вільними членами яких є кількість проекцій [1, с.148].

Серед найбільш відомих ітераційних методів відновлення перетинів виділяють такі:

- алгебраїчний метод (ART − Algebraic Reconstruction Technigues);
- метод одночасного ітераційного відновлення (SIRT − Simultaneous Iterative Reconstruction Technique);
- ітераційний метод найменших квадратів (ILST − Iterative Least-Squares Technique).

Ці методи відрізняються в основному послідовністю внесення поправок під час ітерації.

Алгебраїчні методи мають однаковий алгоритм дій. Спочатку здійснюється дискретизація функції g, що реконструюється, і проекційних даних f, при цьому їх вважають векторами лінійних просторів. Одним із способів дискретизації функції g є такий, при якому її область визначення розбивається на малі підобласті (пікселі в R^2 і вокселі в R^3), що перетинаються лише по межах, у яких значення функції вважається незмінним. Номер пікселя або вокселя j визначає координату у векторному просторі, а величина g_j задає значення координати. Якщо дані об'єднані в проекції і кожна проекція утворюється показами q детекторів, то p-ому детектору на m-ій проекції приписують номер:

$$i = (m-1) \cdot q \ \ + p.$$

Потім будується проектуючий оператор, внаслідок чого дана задача зводиться до системи рівнянь, яка може бути нелінійною та містити не алгебраїчні рівняння. Але медична рентгенівська томографія та емісійна томографія плазми описуються системою лінійних алгебраїчних рівнянь. У обох випадках проектуючий оператор апроксимує інтеграли вздовж прямих скінченною сумою, тому можна записати:

$$\sum_j a_{ij} g_j = f_i \ \text{ або } Ag = f,$$

де $g \in R^J$, $f \in R^I$, J − число пікселів (вокселів), на які розбита область визначення шуканої функції, I − повне число відомих інтегралів вздовж прямих. Відповідно матриця А має порядок $I \times J$.

Отриману систему рівнянь зазвичай обчислюють ітераційними методами. Найбільш простими з них є алгоритми, які мають наступну спільну форму:

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + c_k\big(g^{(k)}, f, A\big),$$

де значеннями функції c_k є вектори простору R^J.

Найпоширенішим методом серед ітераційних є ART:

$$g^{(k+1)} = \begin{cases} g^{(k)} + \lambda^{(k)} \frac{f_{i(k)} - \langle a^{i(k)}, g^{(k)} \rangle}{\|a^{i(k)}\|^2} \left(a^{i(k)}\right)^T, \|a^{i(k)}\| \neq 0 \\ g^{(k)}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|a^{i(k)}\| = 0 \end{cases}.$$

де $\langle a^{i(k)}, g^{(k)} \rangle$ − скалярний добуток в R^J; $a^{i(k)}$− $i(k)$-ий рядок матриці А; $\left(a^{i(k)}\right)^T$− вектор-стовпець, отриманий в результаті транспонування рядка $a^{i(k)}$ [6, с.90-94].

При реконструкції методом ART корекція відбувається одночасно для усіх точок, що входять в окремий промінь. Потім процедура повторюється для наступного променя тощо. При цьому враховуються результати попередніх ітерацій. Серед алгебраїчних методів відновлення даний метод є найшвидшим, оскільки він потребує меншої кількості затрат часу.

Зауважимо, що алгоритми ART використовувалися в першому рентгенівському медичному томографі Хаунсфілда, а сьогодні застосовуються в мікротомографії. Також, окрім зазначених вище способів алгебраїчної реконструкції, існують десятки їх модифікацій, які використовують апріорні дані з функції, що відновлюється [9, с.117].

Розглянемо застосування ітерацій в геоінформаційних системах.

Зображення, які ми отримуємо за допомогою космічних засобів дистанційного зондування Землі, відіграють велику роль у наукових дослідженнях, промислових, господарських, військових та інших цілях. Вони дозволяють отримати інформацію про стан навколишнього середовища та атмосфери, оцінку врожаю сільськогосподарських культур, оцінку наслідків стихійних лих (повені, землетрусів, виверження вулканів, лісових пожеж). Також засоби дистанційного зондування ефективні при вивченні забруднення грунтів та водойм.

Для створення основної складової геоінформаційних систем (ГІС) – електронних карт, використовують цифрові аерокосмічні зображення земної поверхні разом з топографічними картами, планами міст, аеронавігаційними і морськими картами [3, с.4].

Дані на картографічних сервісах отримують шляхом переходу від призначених для користувача систем до системи координат WGS-84 за алгоритмом, що складається з таких етапів:

1. Перехід від місцевої системи або від СК-63(система плоских прямокутних координат в картографічній проекції Гаусса-Крюгера) до системи координат СК-42.
2. Обчислюють геодезичні координати: широту і довготу B_{42}, L_{42}.
3. Визначають прямокутні просторові координати в системі СК-42:
$$X_{42} = (N_{42} + H_{42})cosB_{42}cosL_{42};$$
$$Y_{42} = (N_{42} + H_{42})cosB_{42}sinL_{42};$$
$$Z_{42} = [N_{42}(1 - e^2) + H_{42}]sinB_{42},$$
де N_{42}– радіус кривизни перетину першого вертикала, що обчислюється за широтою B_{42}; H_{42}– геодезична висота відносно еліпсоїда Красовського; е − перший ексцентриситет меридіанного еліпса для еліпсоїда Красовського.
4. Виконують переобчислення прямокутних просторових координат із системи СК-42 в WGS-84.
5. Переходять від прямокутних просторових координат WGS-84 до еліпсоїдних координат, використовуючи формули:
$$tgL_{84} = \frac{Y_{84}}{X_{84}};$$
$$tgB_{84} = \frac{Z_{84}}{\sqrt{X_{84}^2 + Y_{84}^2}} + \frac{N_{84}e_{84}^2}{N_{84} + H_{84}}tgB_{84};$$
$$H_{84} = \sqrt{X_{84}^2 + Y_{84}^2}secB_{84} - N_{84}.$$

Обчислення за двома останніми формулами виконується методом ітерацій.

Отримані значення B_{84}, L_{84}, H_{84} використовуються прикладними для користувача програмами для формування KML-файла, який дозволяє відобразити відповідну просторову інформацію на картографічному веб-сервісі.

Даний алгоритм є універсальним і може бути застосований для достатньо широкого кола задач [2, с.359-361].

Ітераційні методи також використовують у будівельній механіці, наприклад, при розрахунку стійкості пружних систем.

Також слід зазначити, що метод ітерацій будується на принципі стискаючих відображень. Їх взаємозв'язок можна спостерігати, наприклад, при доведенні теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, яке ґрунтується на методі послідовних наближень в умовах, коли діє принцип стискаючих відображень.

Список використаних джерел

1. Бекман И.Н. Радиационная и ядерная медицина: физические и химические аспекты. Радиохимия. Том 7.− МО, Щёлково: Издатель Мархотин П.Ю., 2012.− 400 с.
2. Гавриленко Д.Ю. Использование картографических web-сервисов для представления маркшейдерско-геодезической информации // Наукові праці УкрНДМІ НАН України.−2013.−№12.− с.356-365.
3. Горбачев С.В. Цифровая обработка аэрокосмических изображений / С.В. Горбачев, С.Г. Емельянов, Д.С. Жданов и др.− Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016.− 304 с.
4. Канторович Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов.− М.: Физматлит, 1959.− 684 с.
5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.− М.: Мир, 1969.− 448 с.
6. Лихачев А.В. Алгоритмы томографической реконструкции. Учеб. пособие.− Новосибирск: НИУ-НГУ, 2013.− 117 с.
7. Марусина М.Я. Современные виды томографии. Учебное пособие / М.Я. Марусина, А.О. Казначеева.– СПб: СПбГУ ИТМО, 2006.– 132 с.
8. Морозова В.Д. Введение в анализ: Учеб. Для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996.− 408 с.
9. Филонин О.В. Общий курс компьютерной томографии.− Самара: Самарский научный центр РАН, 2012.− 407 с.

Анотація. Лубенець З. Застосування методу стискаючих відображень. *У статті розглянуто деякі практичні застосування методу стискаючих відображень та методу ітерацій. Наведено приклад застосування ітераційного методу в ядерній медицині, а саме в томографії, та в геоінформаційних системах.*

Ключові слова: *метод стискаючих відображень, метод ітерацій, ядерна медицина, комп'ютерна томографія, електронні карти.*

Abstract. Lubenets Z. Application of the method of compression mappings. *The article considered some practical applications of the method of compression mappings and the iteration method. An example application of the iterative method in geoinformation systems and nuclear medicine, namely in tomography, is given.*

Keywords: *method of compression mappings, the iteration method, nuclear medicine, computed tomography, electronic maps.*

Мартинова Наталія
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
mmmnataha12321@gmail.com
Науковий керівник – М. Г. Друшляк

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ QR-КОДІВ ПРИ СТВОРЕННІ ПІДРУЧНИКІВ З МАТЕМАТИКИ

Сучасний світ постійно змінюється набираючи все більше обертів. Сучасні учні практично не уявляють своє життя без гаджетів. З їх використанням сучасними підлітками здійснюються більшість повсякденних дій: спілкування у соціальних мережах, переглядання фільмів, розваги, пошук потрібної інформації, прослуховування музики тощо. Виникає питання, чому цей значимий для учнів аспект їх життя не перенести у площину навчання. Такою точкою дотику процесу навчання і постійного використання учнями смартфонів є QR-код – універсальний носій інформації.

QR-код (з англійської Quick Response Code «швидкий відгук») – це графічне зображення, в якому зашифрована закодовані спеціальні службові символи, що дозволяють визначити зміст зображення. Це можуть бути текст, адреса електронної пошти, гіперпосилання на сайти, номери телефонів, географічні координати, відео на YouTube, посилання на сторінку профілю в соціальних мережах, аудіофайли, online-бібліотеки тощо [1]. Такі графічні позначки є вдосконаленням лінійних штрих-кодів. Для зчитування QR-кодів використовується вбудована камера планшета або смартфона. Достатньо лише навести камеру на обраний вами штрих-код (в тому числі QR-код) і трохи зачекати, утримуючи смартфон чи планшет нерухомо, щоб камера автоматично сфокусувалася на зображенні, а програма визначила характерні для штрих-коду елементи (смужки або квадратики по кутах). Після цього код майже миттєво зчитується, розшифровується, а закодований в ньому текст з'являється на екрані, а далі цей текст, наприклад, посилання на сайт, можна передати в браузер натисканням всього однієї кнопки і перейти на потрібний сайт.

Використання QR-кодів дозволить урізноманітнити навчальний процес. До того ж, залучення новітніх технологій у навчальний процес збільшить зацікавленість учнів до навчання і може стати зручною формою організації навчального процесу. Особливо природнім є використання QR-кодів у рамках впровадження BYOD підходу в освіті (Bring Your Own Device – принеси свій власний пристрій).

Питанням використання QR-кодів у навчальному процесі присвячені роботи В. Л. Бузько, Ю. В. Єчкало [2], П. Є. Демченко [3], І. В. Довженко, Н. В. Новохатська [4].

Метою статті є визначення особливостей та раціональності використання QR-кодів у підручниках з математики.

На жаль, лише в деяких українських підручників з математики зустрічається ця інновація, тоді як в інших країнах підручники з QR-кодами з різних предметів вже активно впроваджуються.

У науковій літературі можна зустріти багато суперечностей про те, яким бути сучасному підручнику – звичайному «паперовому» або електронному. Прихильники електронних підручників виділяють такі його переваги, як компактність (всі підручники за всі роки навчання можна вмістити в пам'яті одного-єдиного планшета, позбувшись, нарешті, від необхідності тягати важкі портфелі), можливість використання медіа технології (анімовані або навіть інтерактивні ілюстрації, істотно підвищують наочність матеріалу, що не можна реалізувати у рамках паперового підручника).

Прибічники ж традиційних підручників вказують на такі недоліки електронних підручників, як можливі перевантаження очей учнів (планшет – це теж комп'ютер, тому обмежується час неперервної роботи з ними), велика універсальність звичайної книги, для читання якої не потрібно ніяких електронних пристроїв і електроенергії, занадто високу вартість пристроїв для читання електронних підручників. Слід зауважити, що сучасні електронні підручники поки ще недосконалі – вони, по суті, являють собою лише електронні копії паперових підручників і практично не використовують всі ті переваги, які електронне видання має перед традиційним.

Вирішити ці суперечності дозволяє використання QR-кодів, оскільки підручники з QR-кодами поєднують ці дві моделі і виправляють майже всі недоліки обох варіантів. Крім того згідно Державних санітарних норм і правил «Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей» [5] використання QR-кодів у підручниках дозволяє збільшити об'єм навчального матеріалу, не порушуючи обмеження кількості сторінок.

Виділимо можливі шляхи використання QR-кодів при створенні підручників.

1. Використання додаткових електронних ресурсів. Можна закодувати необхідні web-посилання на додаткові електронні ресурси і вставити отримані QR-коди на сторінках підручника (на полях поруч зі згадками відповідних цифрових ресурсів в тексті або з наведеними в тексті підручника посиланнями). При роботі з таким підручником учневі залишається тільки зчитати власним смартфоном потрібний йому QR-код і відразу ж отримати на екрані шуканий цифровий ресурс, щоб почати з ним працювати [6]. Яскравий приклад використання QR-кодів для швидкого переходу до електронної бібліотеки продемонстровано на рис. 2.

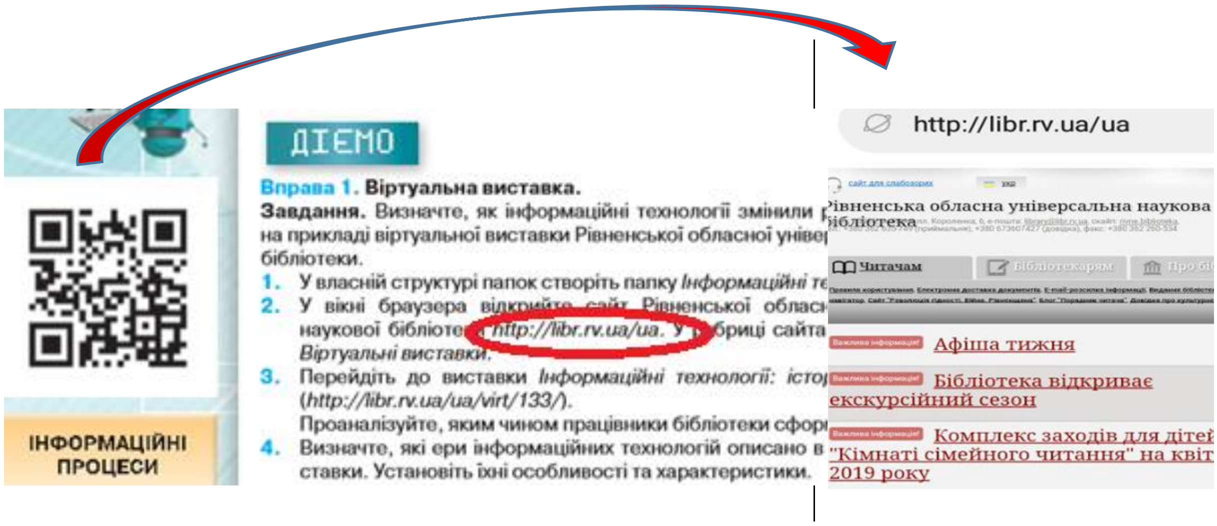
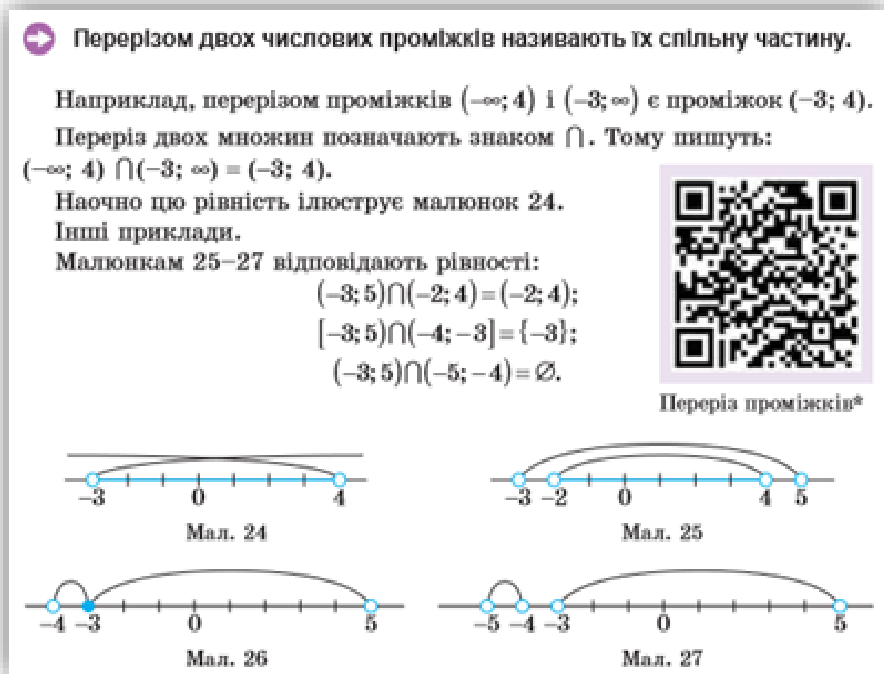


Рис. 2. QR-код з посиланням на цифровий ресурс

2. Використання анімованих ілюстрацій. За допомогою QR-кода можна вставити в друковану книгу анімовані ілюстації або посилання на короткий відеоролик, що допоможе учневі краще розібратися з темою. Так у підручниках з математики це можуть бути розгортки просторових фігур, покрокові наочні побудови перерізів, перетворення графіків функцій, виведення тригонометричних формул, відомості про вчених математиків тощо. Наприклад, у підручнику з алгебри для 9 класу (автори Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н.Г. Владімірова) [7, с. 43] після введення означення спільної частини перерізу двох числових проміжків зустрічається QR-код з посиланням на анімацію, де на конкретному прикладі демонструється один із способів побудови перерізу двох проміжків (рис. 3). У підручнику з геометрії для 9 класу (автори Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н.Г. Владімірова), також присутні QR-коди з посиланнями на анімовані ілюстрації після пояснення теоретичного матеріалу [8, с. 11, с. 75].



Перерізом двох числових проміжків називають їх спільну частину.

Наприклад, перерізом проміжків $(-\infty; 4)$ і $(-3; \infty)$ є проміжок $(-3; 4)$.

Переріз двох множин позначають знаком $\cap$. Тому пишуть: $(-\infty; 4) \cap (-3; \infty) = (-3; 4)$.

Наочно цю рівність ілюструє малюнок 24.

Інші приклади.

Малюнкам 25–27 відповідають рівності:

$$(-3; 5) \cap (-2; 4) = (-2; 4);$$
$$[-3; 5) \cap (-4; -3] = \{-3\};$$
$$(-3; 5) \cap (-5; -4) = \varnothing.$$

Переріз проміжків*

Рис.3. QR-код із зашифрованою анімацією наочної побудови перерізу числових проміжків

3. Розміщення додаткової інформації. В кінці кожного параграфа можна розмістити питання для самоперевірки, поруч з ними варто винести на поля QR-код з посиланням на завдання, виконання яких дозволить систематизувати здобуті знання або повторити матеріал минулої теми, або завдання випереджального характеру для підготовки учнів для вивчення наступної теми.

4. Організація контролю знань. Використання QR-кодів дозволяє включити у підручник такий метод контролю знань учнів як он-лайн тестування з миттєвою оцінкою після завершення.

5. Форма домашнього завдання. Учні можуть записати завдання додому лише зісканувавши QR-код із підручника.

6. Розміщення додаткових матеріалів для вчителя та методичний супровід. Наприклад, у підручнику «Я досліджую світ» для 1 класу (автор О. В. Волощенко, О. П. Козак, Г. С. Остапенко) [9] до кожного тематичного тижня закодовано методичний супровід, який стане у пригоді вчителю при підготовці до уроків (рис.4).

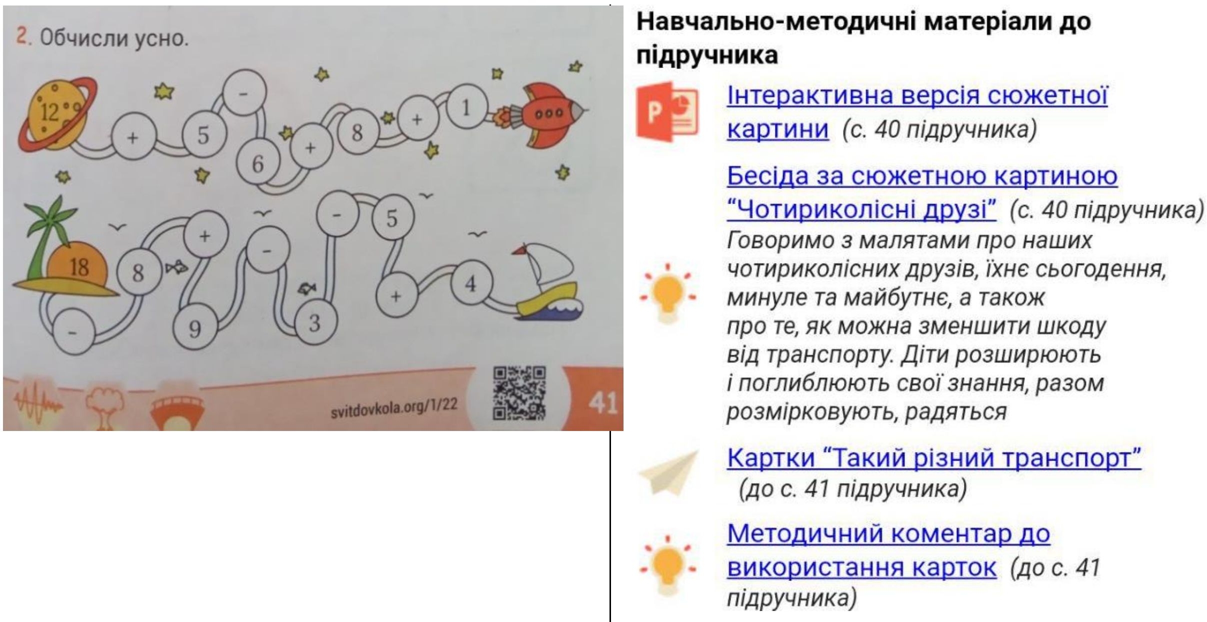


Рис.4. Методичний супровід теми, закодований у QR-код

7. Можливість працювати з віртуальними лабораторіями та онлайн додатками. Інтерактивні роботи дозволять учням проводити віртуальні досліди з математики як у двовимірному так і тривимірному просторі, а також спонукатимуть учнів до вивчення математики через наочні приклади застосування математики на практиці.

8. Аудіо версія теоретичного матеріалу. За типом сприймання та запам’ятовування діти поділяються на візуалів та аудіалів, тому для останніх при засвоєнні та запам’ятовуванні теоретичного матеріалу буде більш ефективним, якщо вони той самий матеріал, що написаний в підручнику будуть ще й сприймати на слух. На полях підручника може розміщуватись QR-код з посиланням на аудіо ресурс.

За результатами дослідження можна зробити наступні висновки.

1. Симбіоз підручника на друкованій основі та використання інформаційних технологій у вигляді QR-кодів надасть можливість привернути увагу учнів до вивчення навчального матеріалу.

2. Використання QR-кодів у підручниках дозволяє збільшити об'єм навчального матеріалу, при цьому зменшити кількість сторінок, що призведе до економії коштів на їх видання.

3. Напрямки використання QR-кодів при створенні підручників досить різноманітні. Серед них розміщення додаткових електронних ресурсів, додаткової інформації, методичного супроводу теми для вчителя, аудіо версії теоретичного матеріалу організація контролю знань, можливість працювати з віртуальними лабораторіями.

Список використаних джерел

1. Огляд переваг використання QR-кодування у навчальному процесі, а також програм для зручного створення та сканування кодів такого типу [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://naurok.com.ua/post/trendi-osviti-yak-vikoristovuvati-qr-kodi-u-navchanni

2. Бузько В. Л. Можливості використання QR-кодів у навчанні фізики / В. Л. Бузько, Ю. В. Єчкало // Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. – 2016. – 1 (10). С. 112-118.

3. Демченко П. Є. Використання QR-кодів при викладанні дисциплін загальнотехнічного циклу [Електронний ресурс] / П. Є. Демченко – Режим доступу до ресурсу: http://fitu.kubg.edu.ua/images/stories/Departments/kitmd/Internet_conf_17.05.18/s1/1_Demchenko.pdf.

4. Довженко І. В. QR код у методиці змішаного навчання [Електронний ресурс] / І. В. Довженко, Н. В. Новохатська // Використання моделі змішаного навчання при викладанні іноземних мов: тези доповідей. – Київ.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. – С. 32-34.

5. Про затвердження Державних санітарних норм і правил "Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей" [Електронний ресурс] // МОЗ України – Режим доступу до ресурсу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0077-07.

6. QR-коды – в школьном учебнике. // Компьютерные инструменты в школе. – 2018. – №1. – С. 26–30.

7. Бевз Г. П. Алгебра 9 клас / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Київ: Освіта, 2017. – 271 с.

8. Бевз Г. П. Геометрія 9 клас / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Київ: Освіта, 2017. – 271 с.

9. Волощенко О.В. Я досліджую світ: підручник для 1 кл. закл. загал. серед. освіти / О. В. Волощенко, О. П. Козак, Г. С. Остапенко. – К.: Світич, 2018. – 128с.

Анотація. Мартинова Н. Особливості використання QR-кодів при створенні підручників з математики. *У статті проаналізовано можливості використання QR-кодів при створенні підручників. На основі узагальнення існуючих досліджень обговорюється переваги та недоліки друкованого та електронного підручника, а також шляхи поєднання цих моделей. Наведені приклади використання QR-кодів у підручниках з математики. Встановлено ефективність впровадження підручників з використанням QR-кодів.*

Ключові слова: *підручник, підручник з математики, QR-код.*

Abstract. Martynova N. Features of using QR-codes when creating textbooks on Mathematics. *The article analyzes the possibilities of using QR-codes when creating textbooks textbooks. On the basis of the generalization of existing researches, the advantages and disadvantages of the printed and electronic textbooks are discussed, as well as the way of combining these models. Examples of using QR-codes in mathematics textbooks are given. The effectiveness of introducing textbooks using QR-codes has been established.*

Keywords: *textbook, textbook on mathematics, QR-code.*

Мельникова Марія
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
mariamelnykova@gmail.com
Науковий керівник – М. Г. Друшляк

ПІДТРИМКА ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ЗАСОБАМИ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ

Геометричні перетворення є одним з найважливих розділів курсу геометрії, оскільки метод геометричних перетворень є досить продуктивним у розв'язуванні багатьох геометричних задач, а його застосування часто спрощує доведення окремих математичних тверджень з різних розділів геометрії.

Шкільна програма передбачає ознайомлення учнів з такими видами перетворень як симетрія (відносно точки та відносно прямої), поворот, паралельне перенесення та гомотетія. Учні мають розуміти суть кожного із зазначених видів геометричних перетворень, знати їх властивості і вміти застосовувати їх до розв'язування найпростіших задач [1].

Огляд методичної літератури свідчить про значущість вивчення геометричних перетворень для розвитку логічного і просторового мислення, для загальнокультурного та естетичного виховання учнів, для демонстрації прикладної спрямованості геометрії. В той же час методисти та вчителі стурбовані недостатнім рівнем знань учнів з цієї теми. Навіть вчителі стикаються з певними труднощами при вивченні геометричних перетворень. Для вчителів досить важко організувати унаочнення геометричних перетворень на папері чи дошці. На вивчення геометричних перетворень відводиться мало часу порівняно з тим, які подальші застосування має ця тема – як у шкільному курсі геометрії, так і при розв'язуванні багатьох олімпіадних задач. До того ж в більшості своїй вчителі «побоюються» даної теми через її несприйняття учнями. А учні, в свою чергу, «недолюблюють» геометричні перетворення через відсутність, зокрема, алгоритмічних підходів у розв'язуванні типових задач, відсутності очевидної сфери подальшого застосування методу геометричних перетворень [2].

Тому за таких умов вивчення геометричних перетворень потрібно розглядати комплексно, на основі нових підходів до навчання та розвитку учнів, нових вимог суспільства до освіченої особистості. У процесі пошуку нових форм та засобів викладання математики, зокрема планіметрії, у ролі такого засобу можуть бути використані програми динамічної математики, серед яких найпопулярнішими є *GRAN*, *DG* (Україна), *Математический конструктор*, *Живая математика* (Росія), *GeoGebra* (Австрія), *Cabri* (Франція), *Geometer's Sketchpad* (США), *GeoNext* (Німеччина) тощо.

Для початку проаналізуємо наявність комп'ютерних інструментів різних програм динамічної математики, які можна використовувати при вивченні геометричних перетворень у шкільному курсі (таблиця 1).

Таблиця 1

Комп'ютерний інструментарій програм динамічної математики з теми «Геометричні перетворення на площині»

Комп'ютерні інструменти, наявні у середовищі	*Gran2d*	*DG*	*ЖГ*	*МК*	*GG*
Здійснення паралельного перенесення з екрану	+	+	+	+	+
Здійснення паралельного перенесення на вектор, заданий окремо координатами	+	+	+	+	+

Здійснення повороту на відмічений кут	+	-	+	+	+
Здійснення повороту на кут, заданий аналітично	+	-	+	+	+
Здійснення гомотетії у відміченому відношення	+	+	+	+	+
Здійснення гомотетії у відношенні, заданому аналітично	+	+	+	+	+
Здійснення симетрії відносно точки	-	+	+	+	+
Здійснення симетрії відносно прямої	-	+	+	+	+
Здійснення інверсії	-	+	-	-	-
Зміна параметрів перетворення	+	-	+	+	-
Робота з образами фігур	+	+	+	+	+
Застосування перетворень до образів фігур	-	-	+	+	+
Застосування перетворень до зображень, завантажених з файлу	-	-	-	-	+

За результатами аналізу комп’ютерного інструментарію можна стверджувати, що для підтримки вивчення теми «Геометричні перетворення на площині» якнайкраще підходить програма динамічної математики *GeoGebra.*

Далі спробуємо виокремити шляхи використання програм динамічної математики (ПДМ) при вивченні теми «Геометричні перетворення на площині» з огляду на доцільність, раціональність та педагогічну виваженість їх використання.

1. Використання ПДМ при розв’язуванні задач на побудову.

Приклад 1 (*GeoGebra*). Дано дві прямі *a* та *b*, які перетинаються, і відрізок *CD*. Побудувати паралелограм *ABCD*, вершини *A* та *B* якого лежать відповідно на прямих *a* та *b*. [3, с.5]

Ідея розв’язання наступна. Вектори *AB* та *CD* рівні, тому при паралельному перенесенні на вектор *CD* точка *A* перейде в точку *B*. Але образ точки *A* повинен належати образу прямої *a*, тому точка *B* є точкою перетину прямої *b* з прямою *a’*, в яку переходить пряма *a*.

Таким чином, спочатку будуємо образ прямої а (пряму *a’*) та точку *B*. Потім перенесемо точку *B* на вектор –*CD* і отримуємо точку *A*. З’єднуємо точки і отримуємо шуканий паралелограм *ABCD* (рис. 1). Зауважимо, що точку *A* можна було одержати побудовою паралельної до сторони *BC* прямої.

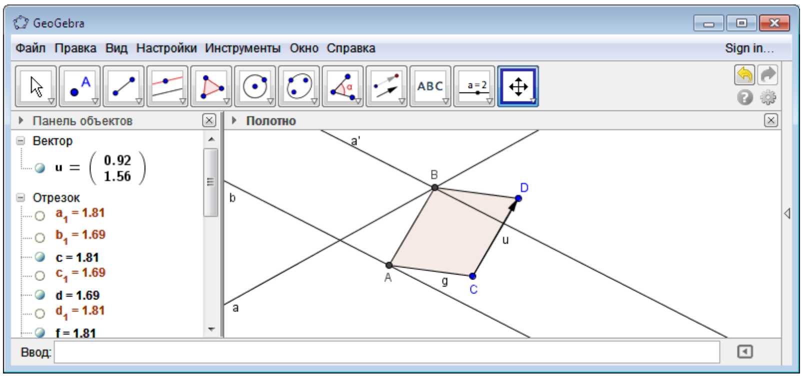


Рис. 1. Модель до прикладу 1 у середовищі *GeoGebra*

Оскільки прямі *a* та *b* перетинаються, то прямі *a* та *a'* паралельні, і задача завжди має єдиний розв'язок.

2. Використання ПДМ при розв'язуванні задач на доведення.

Приклад 2 (*Математический конструктор*) Зовні сторін правильного трикутника побудовані квадрати. Довести, що їх центри є вершинами правильного трикутника [4, с. 51].

Будуємо правильний трикутник *ABC*. На стороні *BC* будуємо *Квадрат1*. При повороті навколо точки *O* (центр трикутника) на кути 120^0, 240^0 та 360^0 фігура *Квадрат1* переходить у фігури *Квадрат2, Квадрат3* та у себе відповідно. При цих поворотах центр першого квадрату (точка O_1) переходить у точки O_2, O_3 та у себе (рис.2). Відрізки O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 рівні між собою. При зміні положення точок вихідного трикутника довжини сторін трикутника $O_1O_2O_3$ залишаються однаковими.

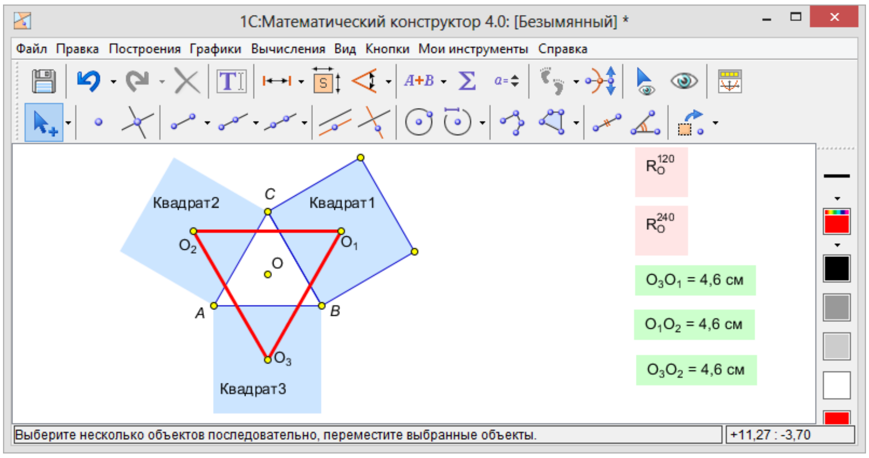


Рис.2. Модель до прикладу 2 у середовищі *Математический конструктор*

3. Використання ПДМ при розв'язуванні задач на дослідження.

Приклад 3 (*Жива Геометрія*). Вписати квадрат у даний трикутник. [5, с.206]

Для побудови моделі (рис. 3) пропонуємо спочатку побудувати трикутник, потім обирати на його стороні довільну точку, через яку проводимо перпендикуляр. Відмічаємо точку перетину і ховаємо перпендикуляр. Одержаний відрізок повертаємо на 90^0 так, щоб у результаті отримати квадрат, який однією стороною буде лежати на основі трикутника (інші способи побудови можуть порушити конструкцію). Проводимо пряму через вершину трикутника і вершину квадрата, відмічаємо одержану точку перетину. Якщо змінювати квадрат, то в якийсь момент він стане вписаним у трикутник, що і вимагається умовою задачі. Точну відповідь одержимо, застосувавши гомотетію до початкового квадрату.

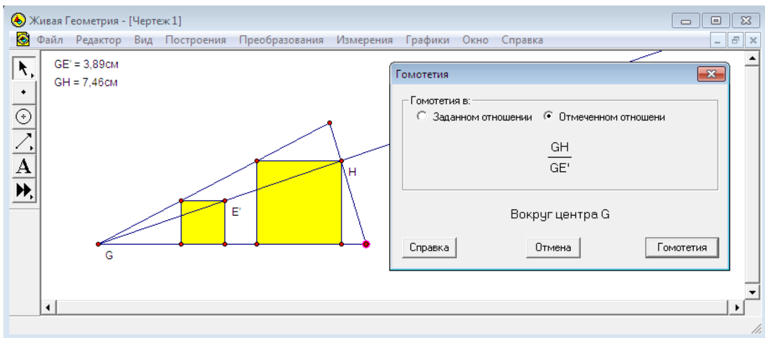


Рис. 3. Квадрат, вписаний у даний трикутник, у середовищі Жива Геометрія

При заданні гомотетії потрібно вказати центр гомотетії (*Преобразования/Отметить центр* або подвійне натискання на потрібній вершині) та коефіцієнт гомотетії (*Преобразования/Отметить коэфициент*), який дорівнюватиме відношенню *GH/GE'*. Після цього відмічаємо квадрат, який потрібно перетворити, у меню *Преобразования* обираємо *Гомотетия* і отримуємо фігуру, гомотетичну даній.

4. Використання ПДМ на факультативних заняттях.

Приклад 4 (*Живая Геометрия*). Замостити площину паркетом власного дизайну, використовуючи паралельного перенесення (рис. 4) [6].

Будуємо паралелограм *ABCD*. На сторонах *AB* і *AD* побудуємо довільні ламані. Перенесемо ламану, побудовану на стороні *AB*, на вектор *BC*. Перенесемо ламану, побудовану на стороні *AD*, на вектор *AB*. Серією паралельних перенесень заповнюємо площину.

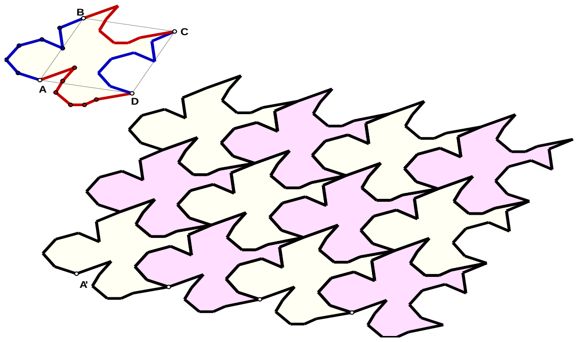


Рис. 4. Замощення площини у середовищі Жива Геометрія

Проведене дослідження дозволяє зробити наступні висновки.

1. Комп'ютерний інструментарій геометричних перетворень площини програм динамічної математики за своїм обсягом та функціоналом повністю відповідає вимогам шкільного курсу математики і може бути використаний при розв'язуванні задач на побудову, на доведення, на дослідження. До того ж може бути використаний на факультативних заняттях при розв'язуванні нестандартних задач.
2. Використання програм динамічної математики *GRAN2d, DG, Живая геометрия, Математический конструктор, GeoGebra* є методично доцільними та перспективними при вивчення геометричних перетворень в шкільному курсі.
3. Використання програм динамічної математики у навчальному процесі дає можливість зосередити увагу учнів на внутрішньому змісті природи використання геометричного матеріалу, дозволяючи підвищити інтерес учнів до предмету, тобто сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу.

Список використаних джерел

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. Закладів / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
2. Семеніхіна О.В. Геометричні перетворення площини і комп'ютерні інструменти їх реалізації / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // Комп'ютер в школі і сім'ї. – 2014. – № 7(119). – С. 25-29.
3. Заславский А. А. Геометрические преобразования / Заславский А. А. – М.: МЦНМО, 2004. – 86 с.
4. Дорофеев С. Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах / Дорофеев С. Н. – Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2002. – 189 с.
5. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. – Х.: Гімназія, 2004. –

272 с.
6. Храповицкий И. С. Методические рекомендации по применению электронного учебного издания Geometer's Sketchpad в учебном процессе общеобразовательных учреждений / Храповицкий И. С. – 2008. – 71 с.

Анотація. Мельникова М. Підтримка вивчення геометричних перетворень в шкільному курсі засобами динамічної математики. *У статті проаналізовано комп'ютерний інструментарій програм динамічної математики GRAN2d, DG, Живая геометрия, Математический конструктор, GeoGebra у контексті підтримки вивчення геометричних перетворень площини. Виділено шляхи використання програм динамічної математики при вивченні теми «Геометричні перетворення на площині» з огляду на доцільність, раціональність та педагогічну виваженість їх використання.*

Ключові слова: *програми динамічної геометрії, геометричне перетворення, комп'ютерні інструменти, GRAN2d, DG, Живая геометрия, Математический конструктор, GeoGebra.*

Abstract. Maria V. Melnykova. Support for the study of geometric transformations in the school course by means of dynamic mathematics software. *The article analyzes the computer tools of dynamic mathematics software GRAN2d, DG, The Geometer's Sketchpad, MathKit, GeoGebra in the context of supporting the study of geometric plane transformations. The ways of using dynamic mathematics software in the study of the topic "Geometric transformations on a plane" are highlighted, considering the expediency, rationality and pedagogical weight of their use.*

Keywords: *dynamic mathematics software, geometric transformations, computer tools, MathKit, The Geometer's Sketchpad, GRAN2d, DG, GeoGebra.*

Недосєка Владислав
Магістрант, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
Huniaka123@gmail.com
Науковий Керівник – Лиман Ф. М.

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ НАД КІЛЬЦЕМ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

1. Лінійні рівняння займають особливе місце серед різних типів рівнянь. Вони є програмною темою шкільного курсу математики. Окремі їх типи зустрічаються в ролі завдань математичних олімпіад.

Нехай Z – кільце цілих чисел і n фіксоване натуральне число. З кільця многочленів $Z[x_1, \dots, x_n]$ візьмемо довільний лінійний вираз

$$f = b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n. \quad (1)$$

Введемо стовпець невідомих $\boldsymbol{X} = \|x_1, \dots, x_n\|$. Візьмемо довільний стовпець над кільцем B $\boldsymbol{L} = \|l_1, \dots, l_n\|$ над кільцем Z поклавши $x_i = l_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Якщо в лінійний вираз f підставити L замість X то отримаємо вираз

$$b_0 + b_1l_1 + \cdots + b_nl_n.$$

Якщо в цьому виразі виконати операції множення і додавання, як операції в кільці B, то ми отримаємо деякий елемент з Z. Цей елемент позначається символом $f(l_1, \dots, l_n)$ і називається значенням лінійного виразу f, що відповідає стовпцю L, L називається стовпцем значень невідомих. **[1]**

Поряд з лінійним виразом f нехай задано ще один лінійний вираз над Z

$$h = c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n.$$

Тоді рядок є істинним , якщо існує стовпець значень невідомих такий, що відповідні йому стовпці значень лінійних виразів f і h рівні. Тоді рівність

$$b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

є істинним твердження . Якщо такого стовпця не існує, то рівність буде хибним твердження.

Ця формула з урахуванням її змісту називається лінійним рівнянням над кільцем цілих чисел.

Для лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел Z визначимо перетворення чотирьох типів.

1) до коефіцієнтів при одній і тій же невідомій в лівій і правій частині лінійного рівняння додається один і той самий елемент з Z;
2) до вільного члена правої і лівої частин лінійного рівняння додається один і той самий елемент з Z;
3) кожен коефіцієнт і кожен вільний член в лівій і правій частинах лінійного рівняння множаться на один і той самий елемент з Z, відмінний від нуля;
4) кожен коефіцієнт і кожен вільний член в лівій і правій частинах лінійного рівняння діляться на один і той самий їх спільний дільник.

Застосувавши до лінійного рівняння (1) суперпозицію цих перетворень, в результаті спрощень отримаємо лінійне рівняння виду

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b. \qquad (2)$$

Рівність (2) називається загальним виглядом лінійного діофантового рівняння. Зокрема лінійне діофантове рівняння з двома змінними має вигляд

$$ax + by = c \qquad (3)$$

2. Для розв’язання рівняння застосовують наступні теореми.

Теорема 1. Якщо a і b - взаємно прості числа, то для будь якого цілого c, рівняння (3) має хоча б один розв’язок у цілих числах.

Теорема 2. Якщо a і b мають спільний натуральний дільник $d \neq 1$, а ціле число c не ділиться на d, то рівняння (3) не має розв’язків у цілих числах.

Теорема 3. Якщо a і b взаємно прості числа, то рівняння (3) має нескінченну кількість розв’язків, які знаходять за формулами $x = x_0 + bk; y = y_0 - ak$, де $(x_0; y_0)$ - будь який цілий розв’язок даного рівняння, $k \in Z$.

Частинний розв’язок $(x_0; y_0)$ можна знайти підбором, для малих a і b, а у випадку коли числа a і b великі, то користуємось наступною теоремою.

Теорема 4. НСД$(a, b) = d$ може бути записаний у вигляді $d = am + bn$, де m, n цілі числа.

3. ***Приклад.*** Розв’язати в цілих числах рівняння $45x - 37y = 25$

Розв’язання. Так як НСД(45;37)=1, то рівняння має безліч розв’язків.

Щоб знайти $(x_0; y_0)$ застосуємо алгоритм Евкліда:

$$45 = 37\cdot 1 + 8; 37 = 8\cdot 4 + 5; 8 = 5\cdot 1 + 3; 5 = 3\cdot 1 + 2; 3 = 2\cdot 1 + 1.$$

Отже $d = 1$. Запишемо алгоритм Евкліда в зворотньому напрямку:

$$1 = 3 - 2\cdot 1 = 3 - 1(5 - 3\cdot 1) = 3 - 5 + 3\cdot 1 = 2\cdot 3 - 5 = 2\cdot(8 - 5\cdot 1) - 5 =$$
$$= 2\cdot 8 - 2\cdot 5 - 5 = 2\cdot 8 - 3\cdot 5 = 2\cdot 8 - 3\cdot(37 - 8\cdot 4) = 2\cdot 8 - 3\cdot 37 + 12\cdot 8 =$$
$$= 14\cdot 8 - 3\cdot 37 = 14\cdot(45 - 37\cdot 1) - 3\cdot 37 = 14\cdot 45 - 14\cdot 37 - 3\cdot 37 =$$
$$= 45\cdot 14 - 37\cdot 17.$$

Отже (14;17) частинний розв’язок рівняння 45*x*-*37y=1*. Тоді

$$25 = 45\cdot(14\cdot 25) - 37\cdot(17\cdot 25); 25 = 45\cdot 350 - 37\cdot 425$$

тобто $(x_0y_0) = (350; 425)$.

Отже всі розв’язки знайдемо за формулами $x = 350 - 37k;\ y = 425 - 45k, k \in Z$.

Приклад. Розглянемо приклад розв'язування рівняння з 4 змінними в цілих числах $2x + 3y - 5z + 6t = 7$;

Запишемо рівняння у вигляді: $2x + 3y + a = 7$;, де $a = -5z + 6t$.

Так як НСД(2;3;1) = 1 і 7 ділиться на 1 то рівняння $2x + 3y + a = 7$; має розв'язки в цілих числах.

Так як НСД(2;3)=1, то представимо $1 = 2m + 3n$, де m, n - деякі цілі числа. Способом підбору $m = -1; n = 1$, підставивши в рівняння отримаємо $2x + 3y + (3 - 2)a = 7; 2(x - a) + 3(y + a) = 7$;

$x - a = u, y + a = v$; тоді $2u + 3v = 7$. Частинний розв'язок (2;1), тоді загальний його розв'язок $u = 2 + 3k, v = 1 + 2k, k \in Z$. З цього

$x - a = 2 + 3k; y + a = 1 + 2k;\ x = 2 + 3k + a;\ y = 1 + 2k - a.$

$$x = 2 + 3k - 5z + 6t, \quad y = 1 + 2k - 5z + 6t;$$

Знайдемо загальний розв'язок даного рівняння:

$$x = 2 + 3k - 5l + 6p, \quad y = 1 + 2k - 5l + 6p;\ \ z = l; t = p; k, l, k \in Z.$$

4. Далі перейдемо до розгляду систем лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел.

Нехай задано $s \geq 2$ пар лінійних виразів над кільцем цілих чисел Z:

$$f_v = b_{v0} + b_{v1}x_1 + \cdots + b_{vn}x_n,$$
$$h_v = c_{v0} + c_{v1}x_1 + \cdots + c_{vn}x_n,$$

де $v = 1, \ldots, s$. Математичне твердження яке може бути або істинним, або хибним, «існує стовпець значень невідомих такий, що відповідні до цього стовпця значення лінійних виразів f_v і h_v рівні для всіх вказаних значень індексу v» записується у формі впорядкованої системи s рівностей.

$$\begin{array}{c} b_{10} + b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = c_{10} + c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n, \\ b_{20} + b_{21}x_1 + \cdots + b_{2n}x_n = c_{20} + c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{s0} + b_{s1}x_1 + \cdots + b_{sn}x_n = c_{s0} + c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n, \end{array} \quad (4)$$ **[1]**

Впорядкована система рівностей (4) з урахуванням її змісту, називається системою лінійних рівнянь на кільцем Z.

Якщо існує стовпець $\boldsymbol{K}$ над кільцем Z такий, що відповідні до цього стовпця значення лінійних виразів f_v і h_v рівні для всіх $v = 1, \ldots, s$, то стовпець $\boldsymbol{K}$ називається розв'язком цієї системи, а сама ця система називається сумісною; якщо вона не має розв'язків то вона називається несумісною. Множина всіх розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь записаних в одній формі, називається її загальним розв'язком.

Перетворення систем л. р. наступних типів називаються елементарними;

1) Множення рівняння системи на елемент $\varepsilon\epsilon Z$.
2) Додавання до одного з лінійного рівняння другого рівняння, помноженого на елемент $\varepsilon\epsilon Z$.

Слід відмітити ще один факт, система лінійних рівнянь буде перетворена в рівносильну, якщо одне з її лінійних рівнянь замінити на рівносильне. Тому якщо корне рівняння системи замінити рівносильним рівнянням, то ця система перетвориться в систему виду

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{array} \quad (5)$$ **[1]**

5. Розглянемо процес розв'язування цієї системи.

Нехай $\boldsymbol{A} -$ матриця коефіцієнтів системи (6) $\boldsymbol{B} -$ стовпець вільних членів тієї ж системи. Системі (6) відповідає блочна матриця $\overline{\boldsymbol{A}} = \|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\|$, яка називається розширеною матрицею системи, і нехай $\boldsymbol{X}$ стовпчик невідомих . Матрична форма запису системи виглядатиме так:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \tag{7}$$

З нього слідує, що коли існує стовпець $\boldsymbol{K}$ такий, що має місце рівність $\boldsymbol{AK} = \boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{K}$ називається розв'язком матричного рівняння (7), а воно називається розв'язним.

Із означення елементарних перетворень системи (ЕПС) і відповідних їм елементарних перетворень матриць (ЕПМ) слідує, що результат застосування суперпозиції σ ЕПС до системи (5) можна отримати наступним чином: суперпозицію відповідних ЕПМ застосувати до розширеної матриці $\|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\|$ системи (5) і, отримавши перетворену матрицю $\|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{D}\|$, перейти до відповідної їй системи л. р.; вона і буде шуканим результатом застосування застосування суперпозиції σ ЕПС до системи (5) а матриця $\|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{D}\|$ буде її розширеною матрицею. **[1]**

В свою чергу, виконання ЕПМ розширеної матриці $\|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\|$ можна замінити множенням її зліва на відповідний елемент матриці. Нехай це будуть матриці $\boldsymbol{V}_1, \dots, \boldsymbol{V}_k$. Поклавши $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_k \dots, \boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1$, можемо записати наступну формулу для перетворення розширеної матриці:

$$\|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{D}\| = \|\boldsymbol{VA}|\boldsymbol{VB}\|.$$

Відповідну цій розширеній матриці перетворену систему л. р. запишемо в матричній формі

$$(\boldsymbol{VA})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{VB}.$$

Спростити обчислення допомагає метод Гауса, в основі якого лежить використання елементарних перетворень матриці, до перетворення в трикутний вигляд.

Приклад. Розв'язати систему л. р. над кільцем Z.

$$\begin{gathered} 9x - 3y + 5z = 4 \\ 6x - 2y + 3z = 5 \\ 3x - y + 3z = -8 \end{gathered}$$

Розв'язання.

1) Помножимо 3 рядок на -2 і додамо до 2.
2) Помножимо 3 рядок на -3 і додамо до 1.
3) Помножимо 2 рядок на -1 і додамо до 1.
4) Помножимо 3 рядок на -3 і додамо до 2.

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \boldsymbol{V}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \boldsymbol{V}_3 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \boldsymbol{V}_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_4\boldsymbol{V}_3\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \left\| \begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 5 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & -8 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -8 \end{array} \right\|$$

Записуємо перетворену систему
$$\begin{gathered} -z = 7 \\ 3x - y + 3z = -8 \end{gathered}$$

тоді $z = -7$, $3x - y = 14$, $y = 3x - 14$,де x – вільна змінна. Тобто система має безліч розв'язків.

6. Нехай дано систему з n л. р.

$$\begin{gathered} c_{11}x_1 + \dots + c_{1r}x_r + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{r1}x_1 + \dots + c_{rr}x_r + \dots + c_{rn}x_n = d_r \end{gathered} \tag{8}$$

Систему (8) назвемо крамерівською, якщо існує мінор порядку r її матриці коефіцієнтів, що є оборотним елементом кільця. Крамерівська система л. р. завжди сумісна. Для визначеності припустимо, що головний мінор порядку r матриці коефіцієнтів системи л. р. є оборотним елементом і перетворює цю систему наступним чином:

$$c_{11}x_1 + \cdots + c_{1r}x_r = -c_{1,r+1}x_{n+1} - \cdots - c_{1n}x_n - d_1$$

…………………………………………..

$$c_{r1}x_1 + \cdots + c_{rr}x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n - d_r.$$

Введемо дві матриці : матрицю $\boldsymbol{C}$ коефіцієнтів при невідомих $x_1, \dots, x_r$, і матрицю $\boldsymbol{C_0}$ коефіцієнтів при невідомих $x_{r+1}, \dots, x_n$, якщо такі існують. За допомогою цих матриць запишемо систему л. р. (8) в матричній формі

$$\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{C_0X_0} + \boldsymbol{B} \qquad (9)$$

де $\boldsymbol{X} -$ стовпець невідомих $x_1, \dots, x_r$ і $\boldsymbol{X_0} -$ стовпець невідомих $x_{r+1}, \dots, x_n$.Так як визначник $\boldsymbol{C}$ є головним мінором порядку r матриці коефіцієнтів системи (8), то він є оборотним елементом. З цього слідує, що матриця унімодулярна, тобто квадратна матриця з цілими коефіцієнтами, визначник якої дорівнює +1 або -1. Помноживши зліва обидві частини матричного рівняння (9) на матрицю $\boldsymbol{C}^{-1}$, отримаємо його загальний розв'язок

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C_0X_0} + \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad (10)$$

В правій частині рівності (10) доданок $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C_0X_0}$ відсутній, якщо $r = n$; якщо $r < n$,то цей доданок існуватиме і стовпець $\boldsymbol{X_0}$ пробігає всі стовпці над кільцем B, що мають розмір $(n - r) \times 1$. **[1]**

Приклад. Дано систему л. р. над кільцем Z

$$4x + 3y + 2z = 10$$
$$3x + 2y + 3z = 0.$$

Розв'язання. Вона є крамерівською, бо головний мінор другого порядку матриці коефіцієнтів дорівнює -1. Далі $\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{C^{-1}} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$. Використовуючи формулу (10) отримаємо загальний розв'язок системи л. р. в матричній формі $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 \\ 6 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} -20 \\ 30 \end{vmatrix}$. Стовпець $\boldsymbol{X_0}$ є одноелементною матрицею, в розв'язку вона замінена власним елементом z.

Список використаних джерел

1. Родосский К. А. Алгоритм Евклида. М.: Наука, 1988. 240 с.
2. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : для студентів базових напрям. інж.-техн. спец. / П. П. Костробій [та ін.]; ред. Ю. К. Рудавський; Нац. ун-т "Львівська політехніка". – Львів; Львів : Бескид Біт, 2002. – 256 с.
3. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : для студентів базових напрям. інж.-техн. спец. / П. П. Костробій [та ін.]; ред. Ю. К. Рудавський; Нац. ун-т "Львівська політехніка". – Львів; Львів : Бескид Біт, 2002. – 256 с.
4. Гельфонд. А. О. Решение уравнений в целых числах.- М.: Наука, 1978.

Анотація. Недосєка В. Лінійні рівняння та їх системи над полем цілих чисел. *В статті подані основні поняття і деякі факти, які відносяться до лінійних рівнянь і систем лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел. Розглянуті деякі види та методи розв'язання лінійних рівнянь та систем лінійних рівнянь.*

Abstract. Nedoseka V. Linear equations and their systems over the field of integers. *The article presents the basic concepts and some facts that relate to linear equations and systems of linear equations over a ring of integers. Some types and methods of solving linear equations and systems of linear equations are considered.*

Ключові слова: *Лінійне рівняння, система лінійних рівнянь, мінор, сумісна система векторів, крамерівська система векторів.*

Придуха Аліна
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
pridukha97@mail.ru
Науковий керівник – О. П. Страх

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ

Передумови для появи теорії диференціальних рівнянь склалися в другій половині XVII століття, коли математики наблизилися до усвідомлення взаємно оберненого характеру двох основних операцій аналізу нескінченно малих величин – диференціювання та інтегрування. Саме в цей час вперше почали опубліковувати роботи з розглядом рівнянь Якопо Ріккаті.

Означення 1. Рівняння Рікатті – це звичайне диференціальне рівняння виду:

$$y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2 \tag{1}$$

де $q_0(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ – неперервні на деякому інтервалі функції.

Диференціальні рівняння Ріккаті мають зв'язок з групою дробово-лінійних перетворень. Цей зв'язок можна показати за допомогою теореми.

Теорема 1. *Загальний розв'язок рівняння Ріккаті є дробово-лінійною функцією від сталої інтегрування. І навпаки: будь-яке диференціальне рівняння першого порядку, яке має цю властивість, є рівнянням Ріккаті* [1, *с*. 4]

Доведення. Нехай y_1 – частковий розв'язок рівняння (1). За допомогою заміни змінної $y = y_1 + z$ зведемо рівняння до вигляду, що не містить вільний член:

$$(y_1 + z)' = q_0(x) + q_1(x)(y_1 + z) + q_2(x)(y_1 + z)^2$$

$$q_0(x) + q_1(x)y_1 + q_2(x)y_1^2 + z'$$
$$= q_0(x) + q_1(x)y_1 + q_1(x)z + q_2(x)y_1^2 + 2q_2(x)y_1z + q_2(x)z^2$$

$$z' = \big(2q_2(x)y_1(x) + q_1(x)\big)z + q_2(x)z^2,$$

яке, за допомогою заміни $z = \frac{1}{u}$, зводиться до лінійного рівняння:

$$u' + \big(2q_2(x)y_1(x) + q_1(x)\big)u = -q_2(x) \tag{2}$$

Загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд:

$$u = C\varphi(x) + \psi(x),$$

де *C* – стала інтегрування. Тоді отримуємо, що:

$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi + \psi} \tag{3}$$

Таким чином, отриманий розв'язок (3) даного диференціального рівняння (1) є дробово-лінійною функцією від сталої інтегрування *C* і теорему доведено.

З доведення попереднього результату видно, що у випадку, коли відомий частковий розв'язок рівняння Ріккаті, загальний вигляд цього рівняння отримується через зведення його до вигляду рівняння Бернуллі, а відтак і до лінійного рівняння (як рівняння (2)) [2]. Таким чином, основним методом розв'язання рівняння Ріккаті (1) є відшукання його часткового розв'язку y_1 і, шляхом заміни змінної $y = y_1 + \frac{1}{z}$, зведення рівняння до лінійного.

Означення 2. Рівняння Ріккаті, що має вигляд:

$$y' = ay^2 + bx^\alpha$$

де (a, b, α) – деякі сталі, називається спеціальним рівнянням Ріккаті.

Поряд з одновимірним скалярним випадком рівняння Ріккаті (1) розглядають також відповідне матричне рівняння – це рівнянням виду:

$$\frac{dX}{dt} = XA(t)X + \ B_1(t)X + XB_2(t) + C(t).$$

Тут невідомою є деяка $(n \times n)$-вимірна матриця X, а A, B_1, B_2, C – задані $(n \times n)$-вимірні матриці, із залежними від змінної t коефіцієнтами.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування рівнянь Ріккаті щодо знаходження часткового розв'язку та інтегрування рівнянь у випадку коли частковий розв'язок – відомий.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4 \tag{4}$$

<u>Розв'язання</u>

Це рівняння є рівнянням Ріккаті. Методом підбору спробуємо знайти частковий розв'язок заданого рівняння (4). Нехай він має вигляд $y_1(x) = ax^b$, де a та b – деякі числа. Виконавши таку підстановку маємо:

$$abx^{b+1} + ax^{b+1} + a^2x^{2b+2} = 4 \tag{5}$$

Далі, оскільки рівняння (5) є квадратним відносно змінної x для кожного показника степеня $b \neq -1$, то виконання цієї рівності для кожного значення змінної можливе лише тоді, коли $b = -1$. Звідси отримуємо рівність:

$$a^2 = 4,$$

тобто $a = \pm 2$ і часткові розв'язки рівняння (4) мають вигляд $y_{1,2} = \pm\frac{2}{x}$.

Нехай $a = 2$. Тоді виконаємо заміну в рівнянні (4) типу $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z}$:

$$x^2\left(-\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2}\right) + x\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{z}\right) + x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4,$$

$$-x^2\frac{z'}{z^2} + x\frac{1}{z} + 4x\frac{1}{z} + x^2\frac{1}{z^2} = 0,$$

помноживши останнє рівняння на $-\frac{z^2}{x^2}$, маємо лінійне рівняння:

$$z' - \frac{5}{x}z = 1$$

Проінтегрувавши його, отримаємо розв'язок:

$$z = Cx^5 - \frac{x}{4}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}.$$

Більш того, отримані часткові розв'язки $y_1 = \frac{2}{x}$ та $y_2 = -\frac{2}{x}$ отримуються із загального розв'язку при значеннях сталої $C = \infty$ та $C = 0$ відповідно.

Інтегральні криві даного рівняння, що відповідають значенням сталої: $C \in \left\{1, -3, \frac{2}{3}, -7\right\}$ зображено нижче (рис. 1).

Приклад 2*:* Зінтегрувати рівняння Ріккаті

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2 \tag{6}$$

Знаючи, що воно має розв'язок виду $y_1(x) = ax + b$.

<u>Розв'язання</u>

Оскільки відомо, що частковий розв'язок $y_1(x)$ має вигляд: $y_1(x) = ax + b$, то для знаходження невизначених коефіцієнтів виконаємо підстановку його в рівняння (6). Маємо

$$ax - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 = -x^2,$$

$$(a^2 - 2a + 1)x^2 + 2b(a-1)x + b^2 - b = 0$$

Таким чином, з рівності 2-х многочленів маємо значення пар параметрів з наступної множини: $(a,b) \in \{(1,1),\ (1,0)\}$. Тобто частковими розв'язками рівняння (6) є функції $y_1(x) = x + 1,\ y_2(x) = x$.

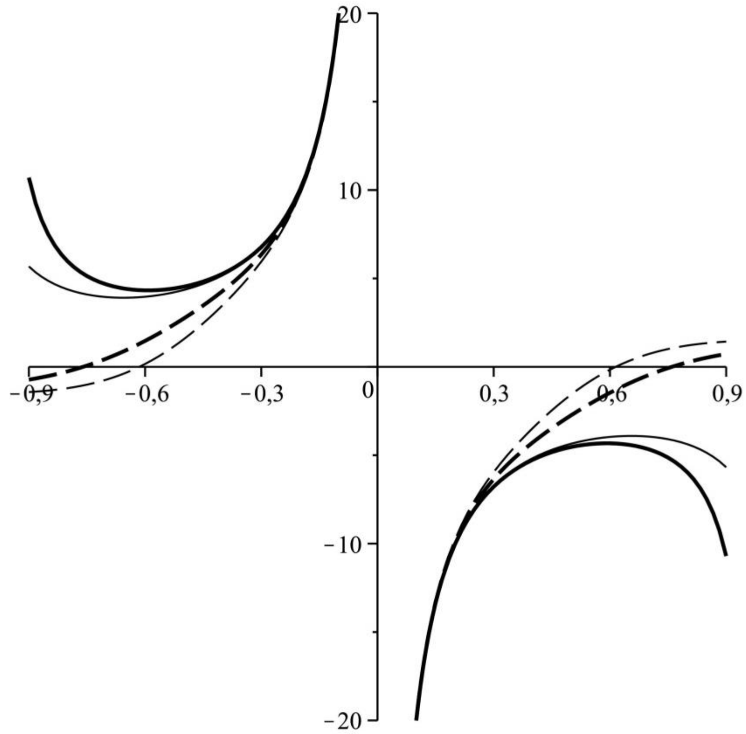


Рис. 1[1]

Нехай маємо частковий розв'язок $y_1(x) = x + 1$. Виконавши заміну $y = x + 1 + \frac{1}{z}$, отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння:

$$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) - (2x+1)\left(x + 1 + \frac{1}{z}\right) + \left(x + 1 + \frac{1}{z}\right)^2 = -x^2,$$

або

$$z' + z\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Проінтегрувавши, знаходимо: $z = 1 + \frac{C}{x}$.

Таким чином, отримуємо загальний розв'язок даного рівняння Ріккаті (6):

$$y = x + \frac{x}{x + C}.$$

Більш того, отримані часткові розв'язки $y_1 = x + 1$, та $y_2 = x$ отримуються із загального розв'язку при значеннях сталої $C = 0$ та $C = \infty$ відповідно.

Інтегральні криві даного рівняння, що відповідають значенням сталої: $C \in \{-1,\ 1,\ 0,\ \infty\}$, зображено нижче (рис. 2).

Приклад 3*:* Розв'язати рівняння Ріккаті

$$xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2. \tag{7}$$

Розв'язання

Спробуємо знайти частковий розв'язок $y_1(x)$ рівняння (7) у вигляді лінійної функції: $y_1(x) = ax + b$ і для знаходження невизначених коефіцієнтів виконаємо підстановку його в рівняння (6). Маємо

$$ax = (ax + b)^2 - 3(ax + b) + 4x^2 + 2$$
$$(a^2 + 4)x^2 + 2a(b - 2)x + b^2 - 3b + 2 = 0$$

Таким чином, з рівності 2-х многочленів маємо наступні значення параметрів: $a = \pm 2i,\ b = 2$. Тобто частковими розв'язками рівняння (7) є функції

[1] Тут і надалі для графічних зображень використано пакети візуалізації програми математичного моделювання Maple 13.

$y_{1,2}(x) = 2 \pm 2ix$. Тоді, виконавши заміну $y = 2 - 2ix + \frac{1}{z}$, отримуємо лінійне неоднорідне рівняння:

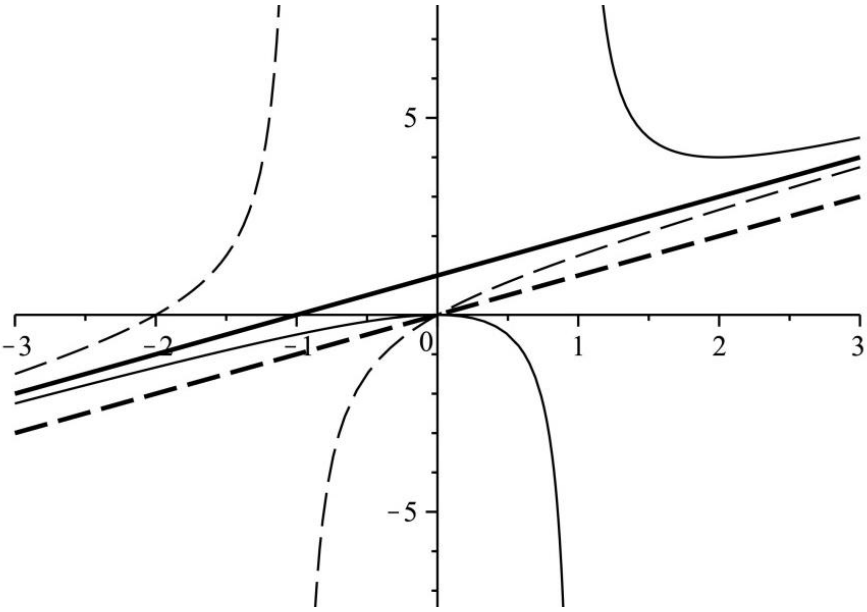


Рис. 2

$$x\left(-2i - \frac{z'}{z^2}\right) = \left(2 - 2ix + \frac{1}{z}\right)^2 - 3\left(2 - 2ix + \frac{1}{z}\right) + 4x^2 + 2,$$

або

$$z' + \frac{1 - 4ix}{x} z = -\frac{1}{x},$$

звідки отримуємо:

$$z(x, C) = e^{-\int \frac{1-4ix}{x} dx}\left(C - \int \frac{1}{x} e^{\int \frac{1-4ix}{x} dx} dx\right) = \frac{Ce^{4ix}}{x} + \frac{1}{4ix}.$$

Таким чином, загальний розв’язок даного рівняння Ріккаті (7) має вигляд:

$$y = 2 - 2ix + \frac{4ix}{4iCe^{4ix} + 1},$$

тобто маємо суто комплексні розв’язки цього диференціального рівняння. Більш того, отримані часткові розв’язки $y_1 = 2 + 2ix$, та $y_2 = 2 - 2ix$ отримуються із загального розв’язку при значеннях сталої $C = 0$ та $C = \infty$ відповідно.

Список використаних джерел

1. Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении, – М.: Факториал, 1998. – 350 с.

2. Методы решения физико-математических задач. Дифференциальные уравнения Риккати [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://1cov-edu.ru/differentsialnye-uravneniya/rikkati/

3. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник (2-ге вид., перероб. і доп.). / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

4. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие (2-е изд., перераб.) / Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

Анотація. Придуха А. Про один метод розв’язування диференціальних рівнянь Ріккаті. *У цій статті викладено основні означення щодо диференціальних рівнянь Ріккаті. Розглянуто основну властивість загального розв’язку скалярного* *рівняння Ріккаті, щодо перетворення його в диференціальне рівняння Бернуллі та лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Наведено чисельні приклади.*

Ключові слова: *диференціальне рівняння Ріккаті, загальний розв'язок диференціального рівняння, частковий розв'язок.*

Abstract. Prydukha A. About one method for solving the Rikkati equations. *The article gives the basic definitions of the Riccati differential equations. The main property of the general solution of the Riccati scalar equation in relation to its transformation into the Bernoulli differential equation and the first order linear nonhomogeneous differential equation is considered. Numerous examples are given.*

Key words: *Riccati differential equation, the general solution of the Riccati equation, particular solution.*

Приходько Олена
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
elena95aleksandrova@gmail.com
Науковий керівник – О.О. Одінцова

РОЗВИТОК ПРОСТОРОВОЇ УЯВИ УЧНІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

При вивченні предметів курсу середньої і старшої школи учні повинні не тільки опанувати основами різних наук, але й ознайомитися з основами виробничих процесів. Отже актуальності набуває питання розвитку навичок з побудови та читання креслень, необхідних і інженеру, і архітектору, і будь-якому кваліфікованому робітнику-новатору. У світлі цих завдань важливе місце займає проблема розвитку просторових уявлень на уроках математики, зокрема, планіметрії та стереометрії.

На даний час, науково технічний прогрес спонукає вчителів до застосування інформаційно-комунікативних технологій (ІКТ) та програм динамічної математики на уроках стереометрії, що безумовно мають позитивний вплив на розвиток просторової уяви в учнів. Застосування таких програм, як GRAN 3D, GeoGebra, Maple, «Живая геометрия», та інших, у навчальному процесі надає можливість створити динамічні моделі для ілюстрації, візуалізації та демонстрації різних математичних понять, означень, теорем, моделей плоских фігур, а також просторових фігур та їх розгорток.

Проблемами впровадження сучасних ІКТ у навчанні математики займалися такі дослідники, як, В. І. Клочко, М. Б. Ковальчук, В. М. Ракута, М. І. Жалдак [1] та багато інших науковців. Результати досліджень цих науковців показують, що впровадження ІКТ у навчальний процес дозволяє розширити можливості вчителя у реалізації дидактичних принципів та сприяти активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, але готові конструкції знижують мобільність просторового мислення, тобто учні не зможуть здобути достатньо практичних навичок виконання рисунків та використання їх, як допоміжних засобів при розв'язанні задач. Таким чином зв'язок теорії з практико, що є найважливішим при вивченні будь-якої дисципліни, не реалізується.

У процесі розв'язування задач на уроках геометрії досить часто в учнів виникають труднощі саме з побудовою рисунка до задачі. Створення рисунка є незамінною частиною розв'язування геометричних задач, зокрема задач на побудову. Теоретико-методичні аспекти формування умінь та навичок учнів побудови зображень стереометричних фігур та розвитку просторової уяви висвітлювались у працях Н. В. Литвиненка [4], А. А. Заславського [2], П. Г. Казакова [3], З. І. Слєпкань [6], В. О. Швець, І. С. Якиманської [7] та інших.

І. С. Якиманська [7] під просторовою уявою пропонує розуміти вільне володіння та оперування просторовими образами, які створюються на різній наочній основі, їх перетворення із врахуванням вимог задачі. Готові конструкції, створені у програмах динамічної математики, можуть дати уявлення про властивості просторових фігур та їх елементів, навіть дещо прискорити навчальний процес. Такі моделі виглядають значно зрозуміліше, ніж рисунки на площині, які не можна обертати чи змінювати їх параметри. Але практичні навички учні можуть здобути тільки виконуючи креслення самостійно. Звісно ж без використання готових моделей просторових тіл не відбувається вивчення стереометрії. На уроках доцільно використовувати наприклад каркаси об'ємних тіл, пропонуючи учням з різних ракурсів виконувати рисунок, щоб при розв'язанні задачі вони могли уявити найвдаліше розташування фігури, та зобразити її проекцію на папері у найзручнішому ракурсі.

За результатами останніх ЗНО, у тому числі і пробного ЗНО 2019 року, відзначається зниження геометричної підготовленості учнів. За офіційним звітом про проведення в 2018 році зовнішнього незалежного оцінювання, із 33-х завдань налічували: 3 – з вибором однієї правильної відповіді, 1 – на встановлення відповідності, 1 – відкрита форма з розгорнутою відповіддю. Навіть серед тестових завдань виникли проблеми. При аналізі статистичних даних результатів виконання завдань сертифікаційної роботи, було виявлено, що найскладнішими виявилися завдання зі стереометрії, а саме з використанням розгортки та перерізу тіла, що складається з найпростіших елементів. Майже третина учасників тестування показали незнання основних аксіом стереометрії та властивостей паралельних прямих. Завдання на встановлення відповідності, пов'язане з порівнянням параметрів циліндра і конуса з відомими об'ємами, не виконали взагалі лише 20% і воно виявилося не складнішим за інші завдання такого типу. Більше як 80 % – не змогли зобразити переріз правильної чотирикутної піраміди заданою площиною, не кажучи вже про визначення виду перерізу та обчислення його периметру.

Також розробники сертифікаційної роботи вважають доцільним збільшити частку стереометричних і планіметричних задач з практичним змістом. Зокрема вже у пробному ЗНО завдання що потребує розгорнутої відповіді вже дещо складніше.

Задача. Площина β проходить через точку A, розташовану на поверхні кулі. Відстань від центра цієї кулі до площини β дорівнює d (d менше радіуса кулі, $d \neq 0$). Радіус кулі, проведений в точку A, утворює з площиною β кут α.

1. Зобразіть переріз кулі площиною α і укажіть на рисунку відстань α.
2. Обґрунтуйте положення кута α.
3. Визначте площу цього перерізу.

Як бачимо, розв'язання такої задачі, потребує навичок побудови рисунка, знання понять і формул, а також сформованих складних стереометричних уявлень. Натомість у шкільній програмі скорочуються і викидаються години на розв'язання задач на побудову об'ємних тіл. Ще у далекому 1946 році М. Ф. Четверухін зазначав: «… доводиться визнати, що середня школа не дає необхідної підготовки учням у області просторових уявлень і уміння застосовувати останні у повсякденному житті… можна вказати дві головні причини цього явища. Перша – це погана постановка, а іноді і повна відсутність креслення (а також малювання) у школі. Друга причина – незадовільна методика викладання курсу геометрії (особливо – стереометрії) у школі. Зокрема, майже повна відсутність задач з геометричним змістом, недостатня увага до геометричних побудов» [4].

Попри багаторазові реформування системи освіти, ця проблема актуальна і нині. У підручниках зі стереометрії взагалі відсутні задачі на побудову просторових фігур, натомість багато завдань вже на побудову їх перерізів, тому, за відсутності практики у виконанні рисунків, завдання зі стереометрії виявляються для випускників чи не найскладнішими.

Перед тим, як переходити до розв’язування обчислювальних стереометричних задач, треба навчити дітей правил побудови рисунка – проекції просторової фігури. Модель і рисунок дають змогу учням виокремити потрібні властивості просторових фігур і абстрагуватися від не важливих, виконати узагальнення, помітити потрібні відношення і зв'язки між елементами фігур, здійснити аналіз через синтез під час доведення теорем і розв'язування задач. Для формування в учнів просторових уявлень і розвитку уяви важливо починати не тільки їх запровадження понять, аксіом та теорем, а і задач на побудову проекцій плоских многокутників, побудови перпендикуляра до прямої і площини, перпендикулярної прямої до даної прямої чи до даної площини, та інші. Саме такі конструктивні задачі є опорними при розв’язанні обчислювальних задач, що потребують побудови проекцій просторових фігур, чи їх комбінацій, чи задач на побудову. Навіть найпростіші задачі зазначеного типу можуть викликати труднощі при розв’язуванні, або і взагалі унеможливити їх розв'язування, через помилки при виконанні рисунка. Приведемо приклад неправильного розв’язання таких задач.

Задача 1. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 3 см. Знайти відстань від площини трикутника до точки, яка рівновіддалена від його вершин на 2 см.

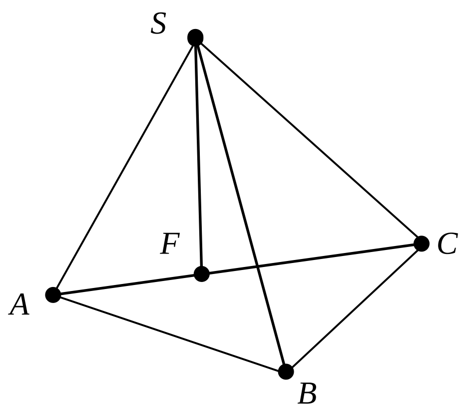


Рис. 1

Задачу розв’язано неправильно, оскільки деякі елементи зображені не за правилами побудови, а саме *AC* та *SF* мають бути штриховими лініями, відстань SF побудовано в площині *ASC* (Рис.1). Тому попередньо доцільно запропонувати задачу на побудову прямої перпендикулярної даній площині, що проходить через задану точку, разом з тим повторюючи та закріплюючи правила побудови рисунка проекції просторової фігури.

Отже, питання розв'язування конструктивних задач не тільки розвивають просторові уявлення, вони виробляють навички побудови рисунка при розв'язуванні обчислювальних задач. Дослідження труднощів, що виникають при розв’язуванні задач, показують, що учні у більшості випадків не можуть розв’язати задачу з числовими даними, оскільки не можуть побудувати правильний рисунок.

Ефективним засобом розвитку просторової уяви, накопичення стереометричних образів математичних понять, активізації уяви, як вже зазначалося раніше, є навчальні програми динамічної математики, але використання на уроках математики комп’ютерної графіки не повинно бути основним засобом формування просторових уявлень, так як вони не забезпечують повною мірою розвиток навичок розв’язування стереометричних задач. Тому доцільно при вивченні стереометрії збільшити кількість годин на розв’язування конструктивних задач на побудову.

Список використаних джерел

1. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак – К.: Техніка, – 2008. – 280 с.
2. Заславський А. А. Геометричні перетворення / А.А. Заславський. – М.: МЦНМО, 2004. – 86с.
3. Казаков П. Г. Параллельные проекции и методы решения конструктивных задач: Пособие для учителей / П. Г. Казаков. – М.: Учпедгиз, – 1960. – 116 с.
4. Литвиненко Н. В. Задачи на развитие пространчтвенных представлений : книга для учителя / Н. В. Литвиненко. – М.: Просвещение, – 1991. – 127 с.
5. Офіційний звіт про проведення в 2018 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти : у 2 т. / Київ : УЦОЯО, 2018. Т. 2. 350с.
6. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.
7. Якиманская И. С. Развитие пространственного мышления школьников / И. С. Якиманская – М. : Педагогика, 1980. – 240 с.

Анотація. Приходько О. Розвиток просторової уяви учнів при розв’язуванні конструктивних задач на побудову на уроках стереометрії. *У даній статті розглянуто важливість розв’язування задач на побудову на уроках стереометрії в школі, що сприятиме формуванню просторових уявлень та просторової уяви учнів. Висновки зроблені на основі аналізу публікацій дослідників та звітної документації щодо результатів ЗНО 2018.*

Ключові слова: *Конструктивні задачі, просторові уявлення, просторова уява, побудова рисунка, стереометричні образи.*

Abstract. Prykhodko O. Development of Students' Spatial Imagination in Solving Constructional Problems at the Lessons of Stereometry. *There are consider the importance of solving tasks for construction at the lessons of stereometry in the school, which will contribute to the formation of spatial representations and spatial imagination of students in this article. The findings are based on the analysis of the researchers' publications and the reporting on the results of the EIA in 2018.*

Keywords: *Constructive tasks, spatial representations, spatial imagination, drawing design, stereometric images.*

Рудик Владислава
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Інформатика)»
vladislava_3@mail.ru
Науковий керівник – В. Г. Шамоня

ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДИКИ ВИВЧЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ В MS EXCEL У ОСНОВНИХ КЛАСАХ

Актуальність дослідження. Реформування системи шкільної освіти в Україні зумовлює пошук ефективних методів організації навчального процесу та корекцію методик викладання шкільних предметів. Реалізація творчого потенціалу дітей неможливе без розвитку креативності та системності їх мислення, інтелектуальної допитливості, навичок особистісної та групової взаємодії, ІТ-обізнаності, здатності до оригінальності та інновацій [3].

Весь світ охоплений загальнодоступними мережами настільки, що сьогодні життя без комп’ютерів та їх спільної взаємодії не можливо уявити.

Процес інформатизації сьогодні набув досить важливого значення. Інформація як стратегічний продукт стає і предметом конкуренції, і засобом захисту та впровадження в життя базових національних інтересів. Здатність суспільства та його інституцій збирати, обробляти, аналізувати, систематизувати та накопичувати інформацію стала ключовою передумовою соціального та технологічного прогресу, фактором національної безпеки, основою успішної зовнішньої політики.

Починаючи зі школи, учні знайомляться з комп’ютером, як пристроєм з програмним забезпеченням для вирішення поставлених завдань, щоб в майбутньому мати навички використовувати інформаційні системи та вміти критично ставитися до безмежної кількості інформації.

При ознайомленні з комп’ютером важливим є вивчення Microsoft Excel.

Електронна таблиця розглядається в шкільному курсі інформатики як об’єкт опрацювання, а табличний процесор — засіб опрацювання електронних таблиць. Під опрацюванням розуміється аналіз даних, їх корекція, синтез висновків, прийняття рішень, експерименти — все, що стосується дослідницької діяльності людини, яка використовує в своїй практичній професійній діяльності електронні таблиці і табличний процесор.

Мета статті – описати особливості методики вивчення статистичних функцій в MS Excel у основних класах.

Виклад основного матеріалу. Статистична сукупність являє собою множину одиниць об’єкту, що вивчається. У відповідності до задачі дослідження володіє однорідністю, масовістю, взаємозалежністю та наявністю варіації.

Слово «статистика» походить від латинського слова *status* – стан, стан речей. У науковий ужиток слово «статистика» увійшло в XVIII ст. і спочатку вживалося в значенні «державознавство». У теперішній час статистика може бути визначена як збирання, представлення, аналіз та інтерпретація числових даних [1, с. 3].

Статистика – наука, що вивчає кількісну сторону масових суспільних явищ з метою встановлення закономірностей в нерозривному зв’язку з їх якісною стороною в конкретних умовах місця і часу в їх взаємозв’язку та взаємозалежності [2, с. 6].

Одним із основних завдань статистики є оптимізація звітності, проведення об’єму інформації, щодо сучасних потреб системи управління в умовах переходу до ринку.

MS Excel надає значні можливості для аналізу статитстичних даних. При розв’язанні простих завдань у даній програмі наявні вбудовані функції СРЗНАЧ(), МОДА(), МЕДИАНА(). Якщо ж завдання більш складні, то надбудова «Пакет анализа» містить набір функцій та інструментів, які розширюють вбудовані аналітичні можливості Excel. Саме завдяки даній надбудові стає можливим будувати гістограми, робити випадкові або періодичні вибірки даних, знаходити їхні статистичні характеристики, генерувати нерівномірно розподілені випадкові числа, проводити регресійний аналіз, використовувати перетворення Фур'є та багато іншого.

Сукупність результатів вимірів у статистиці називають розподілом. Microsoft Excel надає можливості аналізувати такі розподіли, використовуючи вбудовані статистичні функції, функції аналізу вибірок і генеральної сукупності, застосовувати інструменти «Описательная статистика», «Гистограмма», «Ранг», «Персентиль».

До основних вбудованих статистичних функцій відносяться: СРЗНАЧ(), МЕДИАНА(), МОДА(), МАКС(), МИН(), СУММПРОИЗВ(), СУММКВ().

Якщо ж говорити про аналіз вибірок та сукупностей, то функції можна поділити на:

- ДИСП(), ДИСПР(), СТАНДОТКЛОН(), СТАНДОТКЛОНП() – призначенні для обчислення дисперсії та стандартного відхилення чисел в інтервалі середніх значень;
- СУММСУММКВ() – обчислює суму сум квадратів відповідних елементів у масивах;
- СУММКВРАЗН() – обчислює суму квадратів різниці відповідних елементів у масивах.

Інструмент «Описательная статистика» надає можливість будувати таблицю параметрів описової статистиеки для одного або більше наборів вхідних даних.

Інструмент «Гистограмма» (лінійчаста діаграма) – дозволяє опрацьовувати результати вимірів.

У надбудові «Пакет анализа» наявні інструменти, які спрощують розрахунки:

- ПЕРСЕНТИЛЬ (масив, *k*) використовується для визначення елемента у вхідній множині масив із зазначеним рівнем персентиля *k*, що задається у вигляді десяткового дробу між 0 та 1.
- КВАРТИЛЬ (масив, частина) – повертає квартиль множину даних. Визначається масив, для яких визначатиметься значення квартиля, а частина – це значення, яке необхідно буде повернути. (частина може приймати значення 0 – 4).
- НАИМЕНЬШИЙ (масив, *k*) та НАИБОЛЬШИЙ (масив, *k*) знаходять відповідно *k* – тий найменший та найбільший елемент, що задається масивом.

Вбудована функція СЛЧИС() призначена для генерування рівномірно розподілених випадкових чисел в інтервалі від 0 до 1.

Для того, щоб здійснити побудову вибірки з генеральної сукупності застосовують інструмент ВЫБОРКА().

Отже, можна з впевненістю стверджувати, що застосування статистичних функцій значно полегшують розв'язання статистичних завдань. При розв'язуванні завдань такого типу на уроках інформатики учень отримує навички обробки, аналізу та систематизації великих масивів даних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Елисеева И. И. Общая теория статистики: учеб. / И. И. Елисеева, М. М. Юзбашев. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 480 с.
2. Костюк В. О. Статистика: конспект лекцій / В. О. Костюк, І. В. Мількін. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 131 с.
3. Подкопаєва Е. В. Шляхи розвитку творчої особистості учня. Педагогіка співтворчості та співробітництва [Електронний ресурс] / Еліна Вікторівна

Подкопаєва – Режим доступу до ресурсу: http://osvita.ua/school/lessons_summary/edu_technology/27669/.

Анотація. Рудик В. В. Особливості методики вивчення статистичних функцій в MS Excel у основних класах.

У статті пояснюється важливість вивчення Microsoft Excel у школі. Розглянуто сутність поняття «статистика»; основні статистичні функції СРЗНАЧ(), МЕДИАНА(), МОДА(), МАКС(), МИН(), СУММПРОИЗВ(), СУММКВ(); охарактеризовані інструменти «Описательная статистика», «Гистограмма», «Ранг», «Персентиль».

Ключові слова: *комп'ютерна електронна система, MS Excel, статистика, СРЗНАЧ(), МЕДИАНА(), МОДА(), МАКС(), МИН(), СУММПРОИЗВ(), СУММКВ(),ДИСП(), ДИСПР(), СТАНДОТКЛОН(), СТАНДОТКЛОНП(), СУММСУММКВ(), СУММКВРАЗН(), «Описательная статистика», «Гистограмма», «Ранг», «Персентиль».*

Summary. Rudyk VV Features of the method of studying statistical functions in MS Excel in the main classes.

The article explains the importance of studying Microsoft Excel at school. The essence of the concept of "statistics" is considered; The main statistical functions of the FRONT (), MEDIANA (), MODE (), MAX (), MIN (), SIMULATION (), SUMMCH (); Characterized by Descriptive Statistics, Histogram, Rank, Persentiel.

Keywords: *computer electronic system, MS Excel, stylistics, (), MEDIANA (), MODE (), MAX (), MIN (), SIMPROIDISM (), SYMMKV (), DISP (), DISP (), STANDOTCCLONE (), STANDOTCLONP (), SUMMMUMMKV (), SUMMERTOWN (), Descriptive Statistics, Histogram, Rank, Persentiel.*

Старовойтова Наталія
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
natysikmaus@gmail.com
Науковий керівник – Ю.В. Хворостіна

ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ У ВСЕУКРАЇНСЬКИХ УЧНІВСЬКИХ ОЛІМПІАДАХ З МАТЕМАТИКИ

Традиційно основним завданням шкільного курсу алгебри є навчити учнів розв'язувати рівняння та задачі, що зводяться до розв'язування рівнянь. Недаремно впродовж багатьох років алгебру розглядали як науку про рівняння і способи їх розв'язування. Крім цього, слід зазначити, що значна кількість задач шкільного курсу геометрії теж розв'язується алгебраїчним способом, тобто за допомогою рівнянь. Отже, без уміння розв'язувати рівняння різного типу та різного ступеня складності не можна оволодіти шкільною програмою з математики.

Поступово вид і способи розв'язування рівнянь ускладнюються. Упродовж вивчення алгебри учні опановують уміння розв'язувати квадратні, ірраціональні, логарифмічні, тригонометричні, показникові рівняння, а також їх системи, але, на жаль, усі ці рівняння відносяться до так званих визначених, тобто рівнянь з однією змінною або (якщо це система) систем, де кількість змінних дорівнює кількості рівнянь. Загальноприйнята шкільна програма з математики зовсім «забула» про існування не визначених рівнянь (рівнянь, які мають кілька змінних або систем, де кількість змінних більша, ніж кількість рівнянь). Такі рівняння зустрічаються фактично лише на математичних олімпіадах. Виникає риторичне питання: якщо учень не знайомий навіть з основами теорії невизначених рівнянь, як же він буде їх розв'язувати?

Проглянувши Всеукраїнські олімпіади з математики з 2013 по 2019 роки (7-11 класи), можна побачити лише декілька задач на тему Діофантових рівнянь.

Таблиця 1

Кількість завдань, що містять Діофантові рівняння по рокам та класам

Навчальні роки	7 клас	8 клас	9 клас	10 клас	11 клас
2018-2019	1	-	-	-	-
2017-2018	-	-	1	1	1
2016-2017	-	1	-	-	-
2015-2016	-	1	-	-	-
2014-2015	-	-	-	-	-
2013-2014	-	-	2	1	-

З таблиці ми бачимо, що Діофантовим рівнянням приділяється мало уваги.

Наведено приклади завдань, що містять Діофантові рівняння, у Всеукраїнських учнівських олімпіадах з математики.

Приклад 1. (2013-2014 навчальний рік, 9 клас)

Розв'яжіть у натуральних числах *x, y, z* систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2 \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$$

Розв'язання.

З першого рівняння системи маємо, що $x > max\{y, z\}$ та *z* парне. Якщо *x*– парне, то у другому рівнянні отримаємо суперечність. Таким чином x – непарне. З другого рівняння також маємо таку оцінку: $13x < 4x + 3x + 29 \Rightarrow 6x < 29$. З усього наголошеного *x*<5, тобто можливі значення *x=1* (що суперечить умові максимальності *x*) та *x=3*. З останнього простим перебором знаходимо єдиний розв'язок: (3,1,2).

Відповідь: (3,1,2)

Приклад 2. (2013-2014 навчальний рік, 9 клас)

Знайдіть усі такі натуральні *n*, для яких числа $12n - 119$ та $75n - 539$ є точними квадратами натуральних чисел.

Розв'язання.

Позначимо $a^2 = 12n - 119$ та $b^2 = 75n - 539$. Тепер звільнимось від змінної *n*: $\frac{a^2+119}{12} = \frac{b^2+539}{75}$ або $25(a^2 + 119) = 4(b^2 + 539)$.

Далі перепишемо цю рівність таким чином:

$4b^2 - 25a^2 = 819$ або $(2b - 5a)(2b + 5a) = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$.

Залишається перебрати варіанти, з урахуванням того, що $2b - 5a < 2b + 5a$.

$\begin{cases} 2b - 5a = 1, \\ 2b + 5a = 819, \end{cases} \Rightarrow 10a = 818$ -цілих розв'язків немає.

$\begin{cases} 2b - 5a = 3, \\ 2b + 5a = 273, \end{cases} \Rightarrow 10a = 270 \Rightarrow \begin{cases} a = 27, \\ b = 69, \end{cases} \Rightarrow n = \frac{a^2+119}{12} = \frac{848}{12}$ -не ціле число.

$\begin{cases} 2b-5a=7, \Rightarrow 10a=110 \Rightarrow \\ 2b+5a=117, \end{cases} \begin{cases} a=11, \Rightarrow \\ b=31, \end{cases} n=\frac{a^2+119}{12}=20$ -перша відповідь.

$\begin{cases} 2b-5a=9, \Rightarrow 10a=82 \\ 2b+5a=91, \end{cases}$ -цілих розв'язків немає.

$\begin{cases} 2b-5a=13, \\ 2b+5a=63, \end{cases} \Rightarrow 10a=50 \Rightarrow \begin{cases} a=5, \\ b=19, \end{cases} \Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=12$ –друга відповідь.

$\begin{cases} 2b-5a=21, \\ 2b+5a=39, \end{cases} \Rightarrow 10a=18$ –цілих розв'язків немає.

Відповідь: *n*=20, *n*=12.

Приклад 3. (2015-2016 навчальний рік, 8 клас)

Знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел *(x, y)*, що задовольняє рівність:

$$\frac{1}{2}(x^2-y^3)=2016.$$

Розв'язання.

Перепишемо умови задачі таким чином:

$x^2-y^3=2\cdot 2016=2^6\cdot 3^2\cdot 7=2^6\cdot(64-1)=2^{12}-2^6.$

Неважко побачити як шукані розв'язки легко знаходяться.

Відповідь: *x*=64; *y*=4.

Приклад 4. (2016-2017 навчальний рік, 8 клас)

Знайдіть усі пари цілих чисел (*a*, *b*), які задовольняють умову:

$$a^2+b^2=a+b+ab$$

Розв'язання.

Перепишемо рівність таким чином:

$$2a^2+2b^2-2a-2b-2ab=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=2$$

Сума квадратів трьох цілих чисел дорівнює 2. Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. $a-b=0; |a-1|=|b-1|=1$. Тоді зрозуміло, що розв'язками є такі пари чисел (*a*, *b*): (2; 2) та (0; 0).

Випадок 2. $a-1=0;\ |a-b|=|b-1|=1$. Розв'язками є такі пари чисел (*a*, *b*): (1; 2) та (1; 0).

Випадок 3. $b-1=0;\ |a-b|=|a-1|=1$. Розв'язками є такі пари чисел (a, b): (2; 1) та (0; 1).

Відповідь: (*a*, *b*): (2; 2), (0; 0), (1; 2), (1; 0), (2; 1) та (0; 1).

Приклад 5. (2017-2018 навчальний рік, 9 клас)

Для яких цілих чисел *a*, *b*, різної парності існують такі не цілі числа *x*, *y*, що числа x+y та *ax*+*by* є цілими?

Розв'язання.

Оскільки $ax+by=a(x+y)+(b-a)y$. Звідси випливає, що число (*b*-*a*)*y* – ціле.

Якщо $|a-b|=1$, то *y* має бути цілим – суперечність.

Для $|a-b|>1$ можемо вибрати $y=\frac{1}{b-a}$ та $x=-y$. Тоді $x+y=0, (b-a)y$ – ціле, звідси й $ax+by$ буде цілим.

Відповідь: для чисел $|a-b|\neq 1$.

Приклад 6. (2017-2018 навчальний рік, 10 клас)

Три попарно різних натуральних числа *a*, *b*, *c* мають добуток 80 . Якому найменшому простому числу може дорівнювати їхня сума?

Розв'язання.

Зрозуміла, що їхня сума більше 2, тому простим число, яким може бути їхня сума, є непарне число. Оскільки усі три числа не можуть бути непарними, бо мають добутком 80, то там два парних числа і одне непарне. Непарних дільників у числа $80=2^4\cdot 5$ рівно два – 1 та 5 . Розглянемо ці випадки.

c=1, далі можливі такі варіанти:

a=2, b=40, *a*+*b*+*c*=43– просте. *a*=4, *b*=20, *a*+*b*+*c*=25– не просте.

a=8, b=10, a+b+c=19– просте, що менше від 43 .

c=5, тут такі варіанти:

a=2, b=8, a+b+c=15– не просте.

Відповідь: 19.

Приклад 7. (2017-2018 навчальний рік, 11 клас)

Три попарно різних натуральних числа a, b, c мають добуток 320 . Якому найменшому простому числу може дорівнювати їхня сума?

Розв'язання.

Зрозуміла, що їхня сума більше 2 , тому простим число, яким може бути їхня сума, є непарне число. Оскільки усі три числа не можуть бути непарними, бо мають добутком 320 , то там два парних числа і одне непарне. Непарних дільників у числа $320 = 2^6 \cdot 5$рівно два – 1 та 5 .

Розглянемо ці випадки.

c=1, далі можливі такі варіанти:

$a = 2, b = 160, a + b + c = 163$ – просте. $a = 4, b = 80, a + b + c = 85$ – не просте.

$a = 8, b = 40, a + b + c = 49$ – не просте.

$a = 16, b = 20, a + b + c = 37$ – просте, що менше від 163 .

$a = 32, b = 10, a + b + c = 43 > 37. a = 64 > 37 \Rightarrow a + b + c > 37.$

c=5, тут такі варіанти:

$a = 2, b = 32, a + b + c = 33$ – не просте. $a = 4, b = 16, a + b + c = 25$ – не просте.

Відповідь: 37.

Приклад 8. (2018-2019 навчальний рік, 7 клас)

Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), що задовольняють рівності:

$$ab^3 + a^3 + b + 1 = 2019$$

Розв'язання.

З умов задачі зрозуміло, що обидві невідомі – парні, бо інакше маємо рівність парного та непарного чисел. Позначимо через $a = 2n$ та $\mathrm{b} = 2\mathrm{k} \Rightarrow$

$$2n \cdot 8k^3 + 8n^3 + 2k = 2018 \text{ або } 8nk^3 + 4n^3 + k = 1009$$

Далі можна зрозуміти, що k обов'язково має бути непарним, і зараз доволі просто все розв'язати простим невеликим перебором. $nk^3 \leq \frac{1009}{8}$ або $k^3 \leq 125.$

Таким чином залишається рівно три варіанти.

$k = 5 \Rightarrow 1000n + 4n^3 = 1004 \Rightarrow n = 1$ задовольняє умову. При більших n ліва частина стає більшою за 1004.

$k = 3 \Rightarrow 64n + 4n^3 = 1006 \Rightarrow$ розв'язків немає, бо ліва частина ділиться на 4, а права – ні.

$k = 1 \Rightarrow 8n + 4n^3 = 1008 \Rightarrow 2n + n^3 = 252 \Rightarrow n = 2m \Rightarrow 4m + 8m^3 = 252 \Rightarrow$ $m + 2m^3 = 63$. Залишається розібрати три випадки по m, оскільки з останньої рівності очевидно, що $m \leq 3, m = 1, m = 2$ та $m = 3$ умови не задовольняє.

Тому шукана пара єдина, $k = 5$ та $n = 1 \Rightarrow b = 10$ та $\mathrm{a} = 2$.

Відповідь: *a=2, b=10.*

Список використаних джерел

1. Збірники Всеукраїнських олімпіад з математики – [Електрон. ресурс] – Режим доступу: http://www.reshetylivka-osvita.edu.poltava.ua/olimpiadi_zahodi_konkursi/
2. Чемерис М. І. Діофантові рівняння та методи їх розв'язування / М. І. Чемерис // Шкільний світ. – 2013. – №19(703). – С. 8-10

Анотація. Старовойтова Н. Діофантові рівняння у Всеукраїнських учнівських олімпіадах з математики. *У статті проаналізовано завдання Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики за період з 2013 по 2019 навчальні роки для учнів 7-11 класів на наявність у них Діофантових рівнянь. Ми побачили, що таких задач мало. Напевно через те, що в шкільній програмі не приділяється взагалі увага цій темі, а рівняння у цілих числах розглядаються лише на математичних гуртках та факультативах. Також у статті наведено приклади завдань, що містять рівняння у цілих числах, та способи їх розв'язання.*

Ключові слова: *Діофантові рівняння, рівняння в цілих числах, Всеукраїнські олімпіади з математики.*

Abstract. Starovoitova N. Diophantine equations in the All-Ukrainian pupil Olympiads in mathematics. *The article analyzes the tasks of the All-Ukrainian student Olympiads in mathematics for the period from 2013 to 2019 academic years for students of grades 7-11 for the presence of Diophantine equations. We have seen that there are few such tasks. Probably because the school program does not pay attention to this topic at all, and the equations in integers are considered only in math groups and electives. Also in the article are examples of problems that contain equations in integers, and the ways to solve them.*

Keywords: *Diophantine equations, equations in integers, All-Ukrainian Olympiads in mathematics.*

Стеценко Каріна
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
Karina829@ukr.net
Науковий керівник – Ю.В. Хворостіна

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗОБРАЖЕНЬ ЧИСЕЛ ЗНАКОДОДАТНИМИ ТА ЗНАКОЗМІННИМИ РЯДАМИ ЛЮРОТА

У 1883 році німецький математик Я. Люрот знайшов розклад дійсного числа $x \in (0; 1]$ у знакододатний ряд виду:

$$x = \frac{1}{d_1 + 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)} + \dots, \qquad d_n \in \mathbb{N},$$

який тепер називається знакододатним рядом Люрота. У 1990 році С. Калпазідоу, А. Кнопфмахер, Дж. Кнопфмахер запропонували знакозмінний аналог розкладів Люрота. Вони довели, що довільне дійсне число $x \in (0; 1]$ можна подати у вигляді скінченної суми або нескінченного знакозмінного ряду:

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}, \quad a_n \in \mathbb{N},$$

причому кожне ірраціональне число має єдине нескінченне і неперіодичне представлення, а кожне раціональне число або скінченне, або періодичне.

Теорема 1. Кожне число $x \in (0; 1]$ єдиним чином розкладається в ряд Люрота, тобто для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел (d_n), $d_n = d_n(x)$, така, що

$$x=\frac{1}{d_1+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}\equiv\Delta^L_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}.$$

Вираз $\Delta^L_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}$ називається L – зображенням дійсного числа $x\in(0;1]$.

Алгоритм розкладу у знакододатний ряд Люрота. Нехай x довільне дійсне число з $(0;1]$. Оскільки $(0;1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}]$, то очевидно, що для числа $x\in(0;1]$ існує d_1 таке, що

$$x\in\left(\frac{1}{d_1+1};\frac{1}{d_1}\right]\Leftrightarrow\frac{1}{d_1+1}<x\le\frac{1}{d_1}.$$

Тоді

$$0<x-\frac{1}{d_1+1}=x_1\le\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_1+1}=\frac{1}{d_1(d_1+1)}.$$

Оскільки

$$\left(0;\frac{1}{d_1(d_1+1)}\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{d_1(d_1+1)(n+1)};\frac{1}{d_1(d_1+1)n}],$$

то очевидно, що для $x_1\in\left(0;\frac{1}{d_1(d_1+1)}\right]$ існує $d_2\in\mathbb{N}$ таке, що

$$\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}<x_1\le\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2}.$$

Звідки

$$0<x_1-\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}=x_2\le\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)}$$

$$\text{і } x=\frac{1}{d_1+1}+x_1=\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}+x_2.$$

Далі проводимо аналогічні міркування стосовно $x_2\in\left(0;\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)}\right]$ і т.д. За k кроків буде отримано впорядкований набір натуральних чисел $(d_1,d_2,\ldots,d_k)$ і дійсних чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ таких, що

$$0<x_{k-1}-\frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_{k-1}(d_{k-1}+1)(d_k+1)}=x_k\le\frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_k(d_k+1)}$$

Тоді матимемо

$$x_{k-1}=\frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_{k-1}(d_{k-1}+1)(d_k+1)}+x_k.$$

Звідки

$$x=\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}+\cdots+\frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_{k-1}(d_{k-1}+1)(d_k+1)}+x_k.$$

Цей процес нескінченний, але збіжний, оскільки

$$x_k\le\frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_k(d_k+1)}\le\frac{1}{2^k}\to 0\ (k\to\infty).$$

Таким чином має місце розклад

$$x=\frac{1}{d_1+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}\equiv\Delta^L_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}.$$

Теорема 2. Число $x\in(0;1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його L-зображення є періодичним.

Числа, L-зображення яких має простий період, називають L-раціональними. Причому число $x \in (0;1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його L-зображення є періодичним.

Означення 1. Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ - фіксований набір натуральних чисел. Циліндром рангу m з основою $c_1, c_2, \dots, c_m$ називається множина $\Delta^L_{c_1c_2\dots c_m}$, яка містить всі числа x такі $d_i(x) = c_i$при $i \le m$, тобто

$$\Delta^L_{c_1c_2\dots c_m} \equiv \left\{x : x = \ \Delta^L_{c_1c_2\dots c_m d_{m+1}d_{m+2}\dots d_{m+i}} \epsilon\mathbb{N}\right\}.$$

Циліндри мають наступні властивості [1]:

1. $\Delta^L_{c_1c_2\dots c_m} = \bigcup\limits_{i_1=1}^{\infty} \dots \bigcup\limits_{i_k=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1\dots c_m i_1 i_2 \dots i_k}, \forall k \in \mathbb{N}.$
2. Циліндр $\Delta^L_{c_1c_2\dots c_m}$ є півінтервалом з кінцями
$$inf\Delta^L_{c_1\dots c_m} = \frac{1}{c_1+1} + \dots + \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_{m-1}(c_{m-1}+1)(c_m+1)} = a_m,$$
$$sup\Delta^L_{c_1\dots c_m} = max\Delta^L_{c_1\dots c_m} = a_m + \frac{1}{b_m \cdot 2} + \frac{1}{b_m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} + \dots = a_m + \frac{1}{b_m},$$
де $b_m = c_1(c_1+1)\dots c_m(c_m+1)$, тобто
$$\Delta^L_{c_1\dots c_m} = \left(a_m, a_m + \frac{1}{b_m}\right] = \left(a_m, a_m + \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_m(c_m+1)}\right].$$
3. Довжина циліндра виражається формулою:
$$\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m}\right| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_m(c_m+1)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$
4. Для довільної послідовності натуральних чисел (c_n) переріз
$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1\dots c_m} \equiv \Delta^L_{c_1\dots c_m\dots}$$
є точкою (числом) з півінтервалу $(0;1]$.
5. Для відношення вкладених циліндрів виконується рівність:
$$\frac{\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m i}\right|}{\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m}\right|} = \frac{1}{i(i+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\Delta^L_{c_1\dots c_m i}\right| = \frac{1}{i(i+1)}\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m}\right|.$$
6. Має місце наступна оцінка:
$$\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m i}\right| \le \frac{1}{2}\left|\Delta^L_{c_1\dots c_m}\right|.$$

Причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $i = 1$.

Теорема 3. Для довільного дійсного числа $x \in (0;1]$ існує скінченний набір натуральних чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ або нескінченна послідовність (a_n) таких, що

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \ldots = \Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\dots a_n\dots}.$$

Вираз $\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\dots a_n\dots}$ називається $\widetilde{L}$ – зображенням дійсного числа $x \in (0;1]$.

Алгоритм розкладу числа в знакозмінний ряд Люрота. Нехай x довільне дійсне число з $(0;1]$ і

$$a_1 = \left[\frac{1}{x}\right], \quad x_1 = \left(\frac{1}{a_1} - x\right) a_1(a_1+1).$$

Тоді рекурсивно задамо

$$a_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right] \ge 1,$$

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{a_{n+1}} - x_n\right) a_{n+1}(a_{n+1} + 1).$$

Причому, $0 \leq x_n < 1$, що легко побачити з нерівності $\frac{1}{a_{n+1}+1} < x_n \leq \frac{1}{a_{n+1}}$.

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною. Повторне використання описаного вище алгоритму дає такий результат:

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} \cdot x_1 = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)} \cdot x_1 = \ldots$$
$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \ldots + \frac{(-1)^k}{a_1(a_1+1)\ldots a_k(a_k+1)} \cdot x_k .$$

Оскільки, $a_n \geq 1$ для всіх $n > 1$, то

$$\frac{x_n}{a_1(a_1+1)\ldots a_n(a_n+1)} \leq \frac{1}{2^n} \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Звідси випливає, що x має знакозмінний розклад в ряд Люрота.

Теорема 4. Дійсне число $x \in (0;1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його $\tilde{L}$ - зображення є скінченним або періодичним.

Зазначимо, що для раціональних чисел зі скінченним розкладом можлива неоднозначність останнього члена, аналогічна неоднозначності, яка має місце у випадку ланцюгових дробів. Щоб усунути неоднозначність у випадку $a_n = 1$, ми будемо використовувати заміну зображення $\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_{n-1}1(\emptyset)}$ зображенням
$\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots[a_{n-1}+1](\emptyset)}$, де
$[a_{n-1}+1]$ – цифра зображення.

Означення 2. Циліндром рангу n з основою $c_1, c_2, \ldots, c_n$ називається множина $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ всіх $x \in (0;1]$ виду $x = \tilde{L}(a_1a_2\ldots a_n, \ldots)$, або $x = \tilde{L}(a_1a_2\ldots a_n)$, $a_i = c_i, i = \overline{1,n}$.

Циліндричні множини мають наступні властивості [2]:

1. $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_n} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_n i}$.

2. $$inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m-1}} = \tilde{L}(c_1,\ldots c_{2m-1}) - \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)} = \tilde{L}(c_1,\ldots c_{2m-1},1) =$$
$$= \tilde{L}(c_1,\ldots c_{2m-2}, c_{2m-1}+1) \notin \Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m-1}};$$

$sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m-1}} = \tilde{L}(c_1,\ldots c_{2m-1}) \in \Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m-1}}$;

$inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m}} = \tilde{L}(c_1,\ldots c_{2m}) \in \Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m}}$;

$$sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m}} = \tilde{L}(c_1,\ldots c_{2m}) + \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_{2m}(c_{2m}+1)c_{2m}} = \tilde{L}(c_1,\ldots c_{2m},1) =$$
$$= \tilde{L}(c_1,\ldots c_{2m-1}, c_{2m}+1) \notin \Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m}};$$

3. $sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m-1}i} = inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m-1}[i+1]}$;
$inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m}i} = sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_{2m}[i+1]}$.

Нехай $l_1 = \tilde{L}(c_1,\ldots c_n+1), l_2 = \tilde{L}(c_1,\ldots c_n)$.

4. Циліндр $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_n}$ є півінтервалом $(l_1, l_2]$, якщо n – непарне, або піввідрізок $[l_2, l_1)$, якщо n – парне.

5. Для довжини циліндра рангу n має місце співвідношення:

$$diam\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_n} \equiv \left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1\ldots c_n}\right| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)} \leq \frac{1}{2^n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Вираз довжини циліндра $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\dots c_n}$ дозволяє отримати ряд метричних відношень, які лежать в основі метричної "геометрії" зображення чисел знакозмінними рядами Люрота.

6. Якщо $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\dots c_n}$ – фіксований циліндр, то має місце рівність (основне метричне відношення)

$$\frac{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\dots c_n i}\right|}{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\dots c_n}\right|} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Справді,

$$\frac{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\dots c_n i}\right|}{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\dots c_n}\right|} = \frac{c_1(c_1+1)\dots c_n(c_n+1)}{c_1(c_1+1)\dots c_n(c_n+1)i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

З наведених властивостей зображень чисел знакододатним і знакозмінним рядами Люрота можна зробити наступні висновки:

1. Кожне дійсне число інтервала $(0;1]$ єдиним чином розкладається в знакододатний і знакозмінний ряд Люрота. В знакододатньому ряді Люрота для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел, а в знакозмінному ряді Люрота існує єдиний скінченний набір натуральних чисел або єдина нескінченна послідовність.
2. Алгоритм розкладу дійсного числа і в знакододатний і в знакозмінний ряд Люрота зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.
3. У знакододатньому ряді Люрота кожне дійсне число $x \in (0;1]$ є раціональним тоді, коли його $\tilde{L}$-зображення є періодичним, а в знакозмінному ряді Люрота тоді, коли його $\tilde{L}$ - зображення є скінченним або періодичним.
4. Обидва зображення мають однакове основне метричне відношення:

$$\frac{\left|\Delta^{L}_{c_1\dots c_m i}\right|}{\left|\Delta^{L}_{c_1\dots c_m}\right|} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

5. Геометрія розміщення циліндрів кожного рангу принципово відрізняється. В знакододатньому ряді Люрота – одностороння, в знакозмінному – різностороння.
6. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота і зображення чисел знакозмінними рядами Люрота мають однакове основне метричне відношення, а тому – аналогічні метричні теорії, але різну топологію.

Список використаних джерел

1. Жихарєва Ю.І., Працьовитий М.В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи топологометричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер.1. Фіз.-мат.науки. – 2008. – №9. – С. 200–211.
2. Хворостіна Ю. В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // Наук. час. НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – №11. – С.102–118.

Анотація. Стеценко К. Порівняльний аналіз зображень чисел знакододатними та знакозмінними рядами Люрота. *У даній роботі розглянуто алгоритми розкладу дійсного числа у знакододатний та знакозмінний ряди Люрота. Описано властивості циліндричних множин* L *– зображення і* $\tilde{L}$ *– зображення. Також наведено порівняльний аналіз зображень чисел у знакододатньому та знакозмінному рядах Люрота.*

Ключові слова: *зображення чисел знакододатними та знакозмінними рядами Люрота,* $\tilde{L}$ *– зображення,* L *– зображення, геометричне зображення.*

Abstract. Stetsenko K. Comparative analysis of numerical transform images by the positive terms and alternate series of Lurot. *In this article we consider the algorithms of a real number expanding in the positive terms and alternate series of Lurot. The properties of cylindrical sets L - image and $\tilde{L}$- image are described. Also a comparative analysis of numerical transform images by the positive terms and alternate series of Lurot is given.*

Keywords: *transform images of real numbers by the positive terms and alternate series of Lurot, L – image, $\tilde{L}$- image, geometric image.*

Терьохіна Влада
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
vlada.teryohinaaa@gmail.com
Науковий керівник – В.Д. Погребний

ІРРАЦІОНАЛЬНІ АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ В ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ

Нині в умовах світового співробітництва, інтеграції економіки, виробництва, наукових досліджень розвинуті країни всього світу, у тому числі й держава Україна, прагнуть до підвищення свого Інтелектуального потенціалу. Тому потрібний високий рівень математичної підготовки випускників середньої школи та інших навчальних закладів. За відомим висловом М В. Ломоносова (1711-1765), «математику вже тому вчити треба, що вона розум до ладу приводить». У зв'язку з цим підвищуються відповідальність і роль вчителя математики, посилюються вимоги до його власної математичної і методичної підготовки. Головною метою є подальший всебічний розвиток дитини як цілісної особистості, її здібностей і обдарувань, збагачення на цій основі інтелектуального потенціалу людини.

Отже, всебічний розвиток особистості, створення для цього сприятливих умов - головна мета школи. Мета навчання і виховання підпорядковані розвитку і виступають як загальні форми, засоби розвитку. Виходячи із зазначеного, можна сформулювати основні цілі навчання математики в школі:

1)розумовий розвиток учнів - розвиток логічного мислення й інтуїції просторових уявлень і уяви, пам'яті, алгоритмічної та інформаційної культури як особливого аспекту культури мислення; формування позитивних якостей особистості - розумової активності, пізнавальної самостійності, пізнавального інтересу, потреби в самоосвіті, здатності адаптуватися до умов, що змінюються, ініціативи, творчості;

2)забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, потрібних у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності кожному членові сучасного суспільства, достатніх для вивчення інших дисциплін, продовження освіти в системі безперервної освіти; формування уявлень про ідеї і методи математики та її роль у пізнанні навколишнього світу, формування навичок математизації ситуацій під час досліджень різних явищ природи і суспільства;

3)формування наукового світогляду, загальнолюдських духовних цінностей; виховання національної самосвідомості, поваги до національної культури і традицій України; формування позитивних рис характеру (чесності й правдивості, наполегливості; волі, культури думки і поведінки, обґрунтованості суджень, відповідальності за доручену справу тощо); естетичне, екологічне, економічне, патріотичне, трудове виховання, професійна орієнтація на виховання здорового способу життя.

Розв'язування рівнянь – одна з провідних змістових ліній шкільного курсу математики. Вміння розв’язувати рівняння розвиваються в процесі практичного ознайомлення з різними методами виконання таких задач.

Теоретико-математична спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається в двох аспектах: по-перше, у вивченні найважливіших класів рівнянь, нерівностей і їх систем і, по-друге, у вивченні узагальнених понять і методів, що відносяться до лінії в цілому. Обидва ці аспекти необхідні в курсі математики основної школи. Основні класи рівнянь і нерівностей пов’язані з найпростішими і одночасно найважливішими математичними моделями. Використання узагальнених понять і методів дозволяє логічно упорядкувати вивчення лінії в цілому оскільки вони описують те загальне, що є в процедурах і прийомах розв’язання, що відносяться до окремих класів рівнянь, нерівностей, систем. У свою чергу, ці загальні поняття і методи опираються на основні логічні поняття: невідоме, рівність, рівносильність, логічну послідовність, які також повинні бути розкриті в лінії рівнянь і нерівностей.

Для лінії рівнянь і нерівностей характерний напрямок на встановлення зв'язків з рештою змісту курсу математики. Ця лінія тісно пов'язана з числовою лінією. Основна ідея, реалізована в процесі встановлення взаємозв’язку цих ліній, - це ідея послідовного розширення числової множини. Всі числові множини, що розглядаються в шкільній алгебрі і початках аналізу, за винятком області всіх дійсних чисел, виникають у зв'язку з розв’язанням певних рівнянь, нерівностей, систем.

Рівняння складають одну із основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри. Вони є засобом розширенням, поглиблення і закріплення теоретичних знань учнів. Апарат рівнянь широко використовується при розв’язуванні математичних задач. Наприклад, при знаходженні області визначення, при побудові графіків функцій, при розв’язуванні геометричних задач.

“Джерелом алгебраїчних ірраціональностей є двозначність або багатозначність задачі; бо було б неможливо виразити одним і тим же обчисленням багато значень, що задовольняють одній і тій же задачі, інакше, ніж за допомогою коренів; вони ж хіба лише в окремих випадках можуть бути зведені до раціональностей”. - Лейбніц Г.

Значення відкриття ірраціональності в математиці важко переоцінити. У математику, мало не вперше, увійшла складна теоретична абстракція, що не має аналога в донауковому загальнолюдському досвіді.

Ірраціональними називаються рівняння, у яких невідома міститься під знаком кореня.

При розв’язуванні ірраціональних рівнянь часто виникають труднощі, які виражаються в громіздкому обчислені рівнянь, особливо якщо це стосується рівнянь з підвищеною складністю.

В сучасних умовах виділять мало годин для того, щоб якісно учні освоїли тему, необхідна позакласна робота.

Позакласна робота з математики є складовою частиною всього навчального процесу, природним продовженням роботи на уроці. Вона має характер математичних розваг, ігор, змагань. Тут широко використовують вправи і завдання у цікавій формі. Однак, стимулюючи цікавість, треба пам'ятати, що вона цінна лише тоді, коли сприяє розумінню математичної суті питання, уточненню і поглибленню знань з математики.

Позакласна робота сприяє поглибленню знань, яких набувають учні на уроках, прищепленню навичок застосовувати ці знання на практиці, вихованню моральних якостей: волі, наполегливості, критичного ставлення до виконаної роботи, а також розвиває інтерес до вивчення предмету.

Можна використовувати різні види позакласних робіт, такі як: факультативи, гуртки, олімпіади, турніри, інтелектуальні бої, індивідуальна робота та ін..

Для вивчення даної теми необхідно, щоб учні знали основні методи розв'язання ірраціональних рівнянь. До них відносяться:

- зведення до раціонального рівняння послідовним піднесенням до степенів (може підноситись кілька разів). Цей метод є універсальним, але може призвести до громіздких обчислень.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} = x-4$.

Розв'язання. Після піднесення обох частин рівняння до квадрата дістанемо квадратне рівняння $x-2 = x^2-8x+16$. Воно має корені $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

Перевірка здобутих значень x виявляє, що дане рівняння задовольняє лише число $x = 6$.

Якщо заздалегідь визначити область допустимих значень x, розв'язання систему

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$$

Звідси $x \geq 4$, то можна без перевірки відкинути $x_1 = 3$

- метод підстановки або метод введення нових змінних (не універсальний, використовується по можливості, але спрощує обчислення).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$2x-1+x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} - 1 = 0$$

$$3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3-3x$$

$$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1-x$$

$$2x^2-3x+1 = 1-3x+3x^2-x^3$$

$x^3 - x^2 = 0;\ x^2(x-1) = 0;\ \ x_1 = 1\ \ x_{2,3} = 0$

0 – сторонній корінь

- зведення до раціональної системи рівнянь (сума радикалів якесь число, вводиться u_1, u_2)

<u>Важливо</u>! При розв'язуванні рівняння обов'язково необхідна перевірка, тому що можуть з'являтися сторонні корені

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{3-x} = 1$$

Заміняємо $\sqrt[4]{x-2} = \alpha$ $\sqrt[4]{3-x} = \beta$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha^4 = x-2 \\ \beta^4 = 3-x \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha^4+\beta^4 = 1 \end{cases}$$

$$x = 2; 3$$

- Дослідження ОДЗ (може бути порожня множина, або з'явитися 1 чи 2 корені – будуємо точки і перевіряємо їх)

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$3\sqrt[10]{(x-2)(5-x)} + 2\sqrt[12]{(x-2)(x-7)} = x^2-3x+2$$

ОДЗ

$x = 2$

Перевіряємо безпосередньо, це корінь.

- Використання властивостей функції – рівняння $f(x) = g(x)$, де $f(x)$, $g(x)$ – неперервні, одна строго зростає, інша строго спадає. Графіки перетинаються лише в одній точці, яку перевіряємо.

-

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+3} = 3 - x$$

Функція ліворуч зростає, праворуч – спадає, є тільки один корінь

Підбираємо корінь $x = 1$, який задовольняє розв'язок даного рівняння.

Список використаних джерел

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512с.
2. Сканави М.И. и другие Сборник конкурсных задач по математике для поступающих у вузы. Учебное пособие. – 3-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 1978. – 519с.,
3. Назаренко О.М., Назаренко Л.Д. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності. Посібник для абітурієнтів. – Суми: Видавництво «Слобожанщина», 1994. – 272с.
4. Слєпкань З.І. Методика викладання алгебри і початків аналізу. – К., Рад. школа , 1978. – 224с.

Анотація. Терьохіна Влада. Ірраціональні алгебраїчні рівняння в позакласній роботі. *У статті розглянуто роль математики у освіті та продемонстровано основні методи розв'язання ірраціональних алгебраїчних рівнянь, наведено до кожного приклади їх розв'язання.*

Ключові слова: *рівняння, зведення, підстановки, дослідження.*

Abstract. Terokhina Vlada. Irrational algebraic equations in extracurricular work*. In the article the role of mathematics in education is considered and the basic methods of solving irrational algebraic equations are demonstrated, each example of their solution is given.*

Keywords*: equation, summary, substitutions, research.*

Шинкаренко Наталія

Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»

natalyaschinkarenko@yandex.com

Науковий керівник – О.С.Чашечникова

ДО ПИТАННЯ ПРО ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ПЕРЕДУМОВИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ПІДЛІТКІВ. З ДОСВІДУ РОБОТИ

Учитель в своїй педагогічній практиці зіштовхується з цілою низкою проблемних ситуацій, що виникають у процесі взаємодії з учнем. Завданням учителя є організація навчальної діяльності, а також здійснення виховного впливу з метою встановлення загально прийнятих суспільних норм, закріплення їх до автоматизованого дотримання, закладення фундаменту для формування світогляду учня на основі морально-етичних принципів. Досягти поставленої мети, зокрема а уроках математики, практично не можливо, якщо не звернути належної уваги на психологічні особливості учнів.

Звичайно, всі діти є абсолютно різними, кожен має свої психологічні особливості, а тому ідеально підібрати форми, методи, систему вправ для всіх учнів разом не можливо. Проте є такі психологічні особливості, що об'єднують всіх учнів в одному класі. Мова іде про вікові особливості учнів, спираючись на які все ж можна оптимізувати навчальну діяльність.

Вікові особливості – це індивідуально-психологічні особливості, що впливають на характер навчальної діяльності учнів [1].

Для підлітків 10-12 років характерними є спроможність переходити від одного виду діяльності до іншого, володіння загальними способами організації власної діяльності у будь-якій формі, у процесі вивчення математики проявляється здатність до фантазування, створення образів та ситуацій в уяві, виявлення уваги до інформації відомої з попереднього досвіду, відкриті до відомостей, орієнтовані на істотні моменти для тексту, більш повно аналізують матеріал у процесі відповіді на запитання, але мають ще слабо розвинену здатність відшуковувати зв'язки в матеріалі та визначати головне, зосереджуються на частині матеріалу, що вдалося об'єднати, а іншу частину забувають.

Більшість старших підлітків мають яскраво виражену саморегуляцію розуміння та його спрямованість на створення цілісного уявлення про зміст навчального матеріалу; намагаються враховувати всі наявні відомості, встановити внутрішні взаємозв'язки, які дозволяють розглядати відомості як компоненти єдиного цілого. За рахунок того, що старшим підліткам притаманне формування спроможності весь навчальний матеріал розглядати з точки зору взаємозв'язку, розвивається творче мислення учнів. У процесі навчання математики важливим стає підвищення ролі самостійної діяльності учнів на етапах побудови структурно-логічного ланцюга навчального матеріалу та його включення у загальну систему знань.

Учні 7-го класу відносяться до підліткового віку. Більшості учням 7-го класу від 12 до 14 років. Ускладнення умов шкільного навчання, збагачення змісту їх внутрішньо-психічної діяльності спричиняють потужні зміни їх інтелектуальної та особистісної сфер [2]. Крім того, ускладнений зміст навчальної проблеми в основній школі сприяє вдосконаленню роботи логічної пам'яті. Вона поступово займає домінуюче місце під час навчального процесу. І в той же час розвиток механічної пам'яті значно уповільнюється. Ступінь осмислення матеріалу суттєво впливає на якість як запам'ятовування, так і відтворення навчального матеріалу учнем основної школи.

Для семикласників є характерним співвідношення між мисленням та пам'яттю. Згодом пам'ять поступається мисленню – продовжується процес інтелектуалізації вищих психічних функцій.

Протягом підліткового періоду мислення зазнає наступних якісних змін:

1) перехід від предметного і наочного до абстрактного та формального мислення;
2) уможливлення класифікації неоднорідних об'єктів, аналізу нових сполучень предметів і категорій;
3) вживання мовленнєвих абстрактних висловів, співставлення альтернативних ідей,
4) оволодіння учнями здатністю будувати гіпотези, робити висновки й експериментально перевіряти в разі необхідності їх істинність;
5) розвиток здатності в ідеальній формі створювати задум, втілювати його в дійсність, отримувати продукт і тим самим реалізовувати власно спроектований задум, виступаючи при цьому автором ідеальної форми даної проективної діяльності;
6) рефлексія (самоаналіз) своїх власних розумових операцій, вияви формального мислення;
7) оволодіння дискурсивним мисленням – розгорнутими розміркуваннями;
8) спроможність до аналізу й розрізнення слів, намірів та вчинків.

Означені особливості стають підґрунтям для виявів у підлітка критицизму, який засвідчує активізацію процесів мислення. Критицизм підлітковий – схильність підлітків скептично ставитись до пояснень дорослих, сумніватись у правильності їх доказів та шукати свої контраргументи. Хоча вважають, що даний віковий період сприятливий для оволодіння індивідом абстрактним мисленням, однак більшість підлітків виявляють лише рівень конкретних мислених операцій [2].

Працюючи з підлітками 7-го класу Конотопської ЗОШ №7, ми переконалися в тому, що довільна пам'ять переважає у навчанні підлітків, однак мимовільно добре фіксується матеріал, який викликає емоційний супровід чи визнається значимим. Розвиток уваги учнів основної школи відбувається через формування вищих довільних форм, зростання їх обсягу, стійкості та концентрації. Продуктивність уваги залежить від зацікавленості підлітка у діяльності. Учень може тривалий час зосереджувати свою увагу та не відволікатися, якщо його цікавить зміст чи процес діяльності.

У підлітковому періоді вдосконалюється вміння переключати увагу. Але сам процес вдосконалення вмінь залежить від вольових якостей підлітка. Завдяки наполегливості концентрація уваги може стат предметом для самовиховання. Увага підлітків покращується, якщо вміло стимулюється вчителем. На сьогодні розроблено достатньо велику кількість методів та прийомів, що використовуються під час проведення уроків математики з метою мотивації учнів до навчання. Коли діти бачать прогрес у навчанні, вони стають більш старанними. Тому доцільно пропонувати учням диференційовані завдання (письмові та усні).

Зауважують [1], що серед типових особливостей, які необхідно враховувати в процесі навчання, особливо при диференційованому навчанні, виділяють: навченість і навчальні можливості школярів. Складовими навченості є повнота, системність, міцність, усвідомленість знань, дієвість, узагальненість і самостійність мисленнєвої діяльності. Важливими із зазначених компонентів є узагальненість мисленнєвої діяльності, тобто здатність до абстрагування і узагальнення суттєвого у виучуваному матеріалі.

Не менш важливим компонентом навченості є самостійність мисленнєвої діяльності учня. Його приваблюють різні самостійні форми роботи на уроці. Він прагне сам розібратись у навчальному матеріалі. Способи самостійної роботи в учнів 7 класу перебувають тільки на стадії розвитку, вони вже мають деякі навички самостійно організувати свою розумову діяльність, але потребують певного контролю з боку вчителя та батьків.

Суперечності між потребою в самостійності та ще не повноцінно сформованими способами самостійної навчальної діяльності є однією із рушійних сил навчання, що створює сприятливі умови для навчально-виховного процесу. Завдання вчителя полягає в тому, щоб у процесі навчальної діяльності школярів підтримувати і формувати у них інтерес до способів самостійного здобування знань; вчити їх працювати на уроках активно і самостійно.

Формування у школярів самостійності досягається шляхом послідовної постановки перед ними пізнавальних і практичних завдань, які, з одного боку, зрозумілі, цікаві і посильні їм, а з другого - вимагають уміння творчо мислити, знаходити нові підходи до їх вирішення, висловлювати свою власну точку зору [1].

Навченість, поєднавши в собі основні показники продуктивної навчальної діяльності, найповніше визначає індивідуальні відмінності учнів щодо засвоєння і застосування знань.

Важливим фактором, який сприяє успішній навчальній діяльності школярів і водночас визначає їхні відмінності, є ритм роботи або працьовитість. Працьовитість у навчанні - це стан учня, який характеризує рівень і тривалість доступних йому зусиль, необхідних для виконання тієї чи іншої навчальної роботи. Фактор працьовитості пов'язаний із фактором інтелектуальної діяльності - навченістю. Обидва фактори не тільки пов'язані, а і взаємозалежні.

Для успішного навчання учнів 7-х класів, крім відповідного рівня навченості, потрібна і певна працьовитість. Під час педагогічної практики та роботи у школі ми переконалися в тому, що учні з високою працьовитістю при середньому рівні навченості досягають високих результатів у навчанні і водночас учні з високим рівнем навченості, але з низькою працьовитістю, мають середні або навіть низькі результати.

За Н. Т. Волковою [3], спираючись на індивідуальні особливості дітей, при організації диференційованого навчання математики доцільно умовно об’єднати учнів у наступні групи:

Учні з дуже високими навчальними можливостями - характеризуються здатністю швидко засвоювати матеріал, вільно розв’язувати завдання, з інтересом самостійно працювати, потребують завдань підвищеної складності.

Учні з високим рівнем навчальних можливостей - мають міцні знання, володіють навичками самостійної роботи, не поступаються першій групі в засвоєнні матеріалу, але не завжди старанно закріплюють вивчене, бо їм не властива висока працездатність, потребують корекції їхньої роботи, періодичного контролю навчальної діяльності.

Учні з середніми навчальними можливостями - характеризуються здатністю вчитися, окремим притаманна висока виучуваність за низької навчальної працездатності, іншим - середня виучуваність за середньої працездатності, потребують оперативної підтримки й допомоги педагога.

Учні з низькими навчальними можливостями - мають низький рівень навчальної працездатності, потребують спеціального підходу педагога.

На сьогоднішній день, учнів з дуже високими навчальними можливостями та учнів з високим рівнем навчальних можливостей у класах навчається не так багато. У цьому ми переконалися, перебуваючи на практиці у Сумській гімназії №1 (у закріпленому за нами 8-Б класі з 29 троє учні є відмінниками – 2017р.) та працюючи у Конотопській ЗОШ №7 (у 7-му класі з 30 один учень є відмінником – 2018р.)

Без сумніву, організація диференційованих уроків алгебри та геометрії у 7 класі має ґрунтуватися на індивідуальних особливостях учнів, що в свою чергу є неможливим без їх детального вивчення. Але вчитель є завантаженим і тому повноцінно реалізувати бажане досить складно.

Список використаних джерел

1. Психолого-педагогічні основи диференційованого навчання [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://sdamzavas.net/2-44625.html.
2. Психолого-педагогические особенности детей и подростков [Електронний ресурс]. – Режим доступу:http://studepedia.org/index.php?vol=1&post=18976
3. Волкова Н.Т. Педагогіка: Посібник для студентів вищих навчальних закладів. – К.: Академія, 2001. – 576 с.

Анотація. Шинкаренко Н. Диференційоване навчання математики учнів 7-го класу як психолого-педагогічна необхідність. *У даній статті розглянуто важливість врахування психолого-педагогічних особливостей учнів підліткового періоду та як наслідок необхідність введення диференційованого навчання математики учнів 7-го класу з метою оптимізації процесу навчання.*

Ключові слова: *психолого-педагогічні особливості, підлітковий вік, диференційоване навчання математики.*

Abstract. Shynkarenko N. Differential education of mathematics of 7th class masters as psychological and pedagogical needs *In this article, the importance of taking into account the psychological and pedagogical characteristics of adolescent students and, as a consequence, the need for introducing differentiated mathematics training for students of the 7th grade is considered in order to optimize the learning process.*

Key words: *psychological and pedagogical peculiarities, adolescence, differentiated teaching of mathematics.*

Яковенко Анастасія
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
yakovenkonasti@gmail.com
Науковий керівник – В.Д. Погребний

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОКАЗНИКОВО-ЛОГАРИФМІЧНИХ ВИРАЗІВ У ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ

Сьогодні школа вступила в новий етап свого розвитку. Освіта на сучасному етапі характеризується посиленням уваги до особистості школяра, до його саморозвитку та самопізнання, створення максимально сприятливих умов для опанування ним соціально накопиченим досвідом і прояву творчої індивідуальності. Тому мета навчання математики полягає не лише в озброєнні учнів системою знань, навичок й умінь, а й у розвитку індивідуальних здібностей та вихованні особистісних якостей.

Здатність людини визначати та розуміти роль математики в світі, в якому вона мешкає; висловлювати добре обґрунтовані математичні судження та використовувати математику таким чином, щоб задовольняти сьогоденні та майбутні потреби, властиві творчому, зацікавленому та мислячому громадянину. Цю думку розділяла і С. Ковалевська: «Серед усіх наук, що відкривають людству шлях до пізнання законів природи, наймогутніша, найвеличніша наука – математика».

Відповідно до діючого Державного стандарту базової та повної середньої освіти основною метою освітньої галузі «Математика» є: опанування учнями системи математичних знань, навичок і вмінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти.

Основні цілі вивчення математики визначені Законами України "Про освіту", "Про загальну середню освіту", "Державною національною програмою "Освіта", Концепцією математичної освіти 12- річної школи, програмою з математики. Цілі навчання математики розвивальні, навчальні, виховні, а саме:

1) розумовий розвиток учнів, формування позитивних якостей особистості;

2) стійке і свідоме опанування системою математичних знань, навичок і вмінь;

3) естетичне, екологічне, економічне, трудове виховання тощо [3: 9].

У програмі з математики цілі вивчення її окремих розділів конкретизуються [4].

Однією з головних змістових ліній курсу «Математика» в старшій школі є функціональна лінія. Тому доцільно розпочинати вивчення курсу з теми «Функції, їхні властивості та графіки» — його фундаменту. У цій темі здійснюється повторення, систематизація матеріалу стосовно функцій, який вивчався в основній школі, його поглиблення і розширення, зокрема, за рахунок степеневих функцій. Головною метою опрацювання цієї теми є підготовка учнів до вивчення нових класів функцій (тригонометричних, показникових, логарифмічних), а також мотивація необхідності розширення апарату дослідження функцій за допомогою похідної та інтеграла.

Лейтмотивом теми має бути моделювання реальних процесів за допомогою функцій. Оскільки робота з діаграмами, рисунками, графіками є одним із поширених видів практичної діяльності сучасної людини, то до головних завдань вивчення теми слід віднести розвиток графічної культури учнів. Ідеться передусім про читання графіків, тобто про встановлення властивостей функції за її графіком.

У наступних темах розширюються класи функцій, які вивчалися в основній школі. У темах «Тригонометричні функції» і «Показникова та логарифмічна функції» вміння досліджувати функції, які сформовані в першій темі, закріплюються і застосовуються до моделювання закономірностей коливального руху, процесів зростання та вирівнювання.

В уявленні учнів характер фізичного процесу має асоціюватись із відповідною функцією, її графіком, властивостями.

Програма передбачає вивчення тригонометричних функцій, степеневої, показникової, логарифмічної, введення поняття оберненої функції. При вивченні функцій слід зробити наголос на моделюванні реальних процесів, інтерпретації фізичного процесу як функції від змінної фізичної величини. Учні мають асоціювати характер реального процесу з відповідною функцією, її графіком, властивостями. Важливо, щоб притаманні явищу властивості пов'язувались із властивостями функцій (спадання, зростання, прямування до певної границі).

В сучасних умовах шкільного курсу неможливо повністю розкрити тему показниково-логарифмічних виразів, тому доцільно розглядати додаткові методи розв'язування задач на позакласній роботі.

Позакласна робота з математики складає невід'ємну частину навчально-виховного процесу навчання математики, складного процесу впливу на свідомість та поведінку молодших школярів, поглиблення та розширення їхніх знань та навичок таких факторів, як зміст самого навчального предмету – математики, всієї діяльності вчителя у поєднання з різнобічною діяльністю учнів.

Різноманітні види цієї роботи в їхній сукупності сприяють розвитку пізнавальної діяльності учнів: сприйняття, уявлень, уваги, пам'яті, мислення, мови, уяви. “Жоден наставник не повинний забувати, - казав К.Д.Ушинський, - що його найголовніший обов'язок полягає в привчанні вихованців до розумової праці і що цей обов'язок більш важливий, ніж передача самого предмету”.

Вона допомагає формуванню творчих здібностей учнів, елементи яких проявляються в процесі вибору найбільш раціональний способів розв'язання задач, в математичній та логічній вигадливості, під час проведення на позакласних заняттях відповідних ігор, в конструюванні різноманітних геометричних фігур, в організації колективу своїх товаришів, щоб з найбільшою ефективністю виконати якусь роботу або провести пізнавальну гру і т.д.

Для кращого засвоєння теми, перш за все нами було виявлено основні типи задач на перетворення показниково-логарифмчних виразів:

- Обчислення значень показникових виразів;

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{5\cdot 0{,}2^{\frac{1}{2x}}} - 0{,}04^{1-x} = 0$$

Зведемо всі степені до однії снови 5, отримаємо:

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, 0{,}2^{\frac{1}{2x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2x}} = 5^{-\frac{1}{2x}}, 0{,}04^{1-x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1-x} = 5^{-2(1-x)}$.

Тоді рівняння набуде вигляду: $5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2x}} - 5^{-2(1-x)} = 0$, або $5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}} = 5^{-2(1-x)}$.

Перейдимо до рівносильного рівняння: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = -2(1-x)$. Після перетворення отрмаємо

$$\begin{cases} 4x^2 - 5x + 1 = 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

зідки $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}$.

- Обчислення значень логарифмічних виразів;

Приклад 2. Розв'зати рівняння

$$\log_3(x+6)\cdot\log_x 3 = 2.$$

Отримуємо рівносильну систему:

$$\begin{cases} x+6>0, \\ x>0; x\neq 1, \\ \log_3(x+6)\cdot\dfrac{1}{\log_3 x}=2. \end{cases}$$

Розв’язуємо рівння цієї системи. Оскількиx $\neq 1$, то $\log_x 3 \neq 0$ і рівняння набуває вигляду

$\log_3(x+6) = 2\log_3 x$,

або

$\log_3(x+6) = \log_3 x^2$,

або

$x^2 = x+6$.

Знаходимо коені цього рівняння $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

З них лише $x_2 = 3$ задовольняє умови $x+6>0$, $x>0$ і $x \neq 1$.

Відповідь: $x = 3$.

- Доведення логарифмічних рівностей;

Приклад 3. Показати, що ща умови $x>0$ і $y>0$ з рівності $x^2+4y^2=12xy$ слідує рівність $\log_{10}(x+2y) - 2\log_{10}2 = 0{,}5(\log_{10}x + \log_{10}y)$.

За умовою маємо: $(x+2y)^2 - 2x\cdot 2y = 12xy$, $(x+2y)^2 = 16xy$.

Прологарифмувавши обидві частини отриманої рівності за основою 10, отримаємо:

$\log_{10}(x+2y)^2 = 16xy$, $\quad 2\log_{10}(x+2y) = \log_{10}16 + \log_{10}x + \log_{10}y$,

$$2\log_{10}(x+2y) = 4\log_{10}2 + \log_{10}x + \log_{10}y,$$

$$\log_{10}(x+2y) - 2\log_{10}2 = 0{,}5(\log_{10}x + \log_{10}y).$$

- Спрощення показникових виразів;

Приклад 4. Спростити

$$81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$$

Застосовуючи формули для перетворення показнкових виразів, отримаємо:

$$81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} = 3^{4\log_3 5} + 3^{\frac{3}{2}\log_3 36} + 3^{\frac{4}{2}\log_3 7} = 5^4 + 36^{\frac{3}{2}} + 49$$
$$= 625 + 216 + 49 = 890.$$

Відповідь: 890.

- Спрощення логарифмічнихвиразів;

Приклад 5. Спростити

$$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$$

Застосовуючи формули для перетворення логарифмічних виразів, отримаємо:

$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}} = -\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}} = -\log_2\frac{1}{8}\log_2 2 = -\log_2 2^{-3} = 3.$

Відповідь:3.

- Доведення показниково-логарифмічних виразів;

Приклад 6. Довести, що при $y = 2^{x^2}$и $z = 2^{y^2}$, то $x = \pm\sqrt{0{,}5\log_2\log_2 z}$, і вказати всі z, при яких x приймає дійсні значення.

За умовою

$$y>0 \text{ и } z>0.$$

Прологарифмувавши обидві частини рівності за основою 2, отримаємо

$\log_2 y = \log_2 2^{x^2}$, $\log_2 y = x^2$, звідки $x = \pm\sqrt{\log_2 y}$.

Аналогічно z$= 2^{y^2} \to y = \sqrt{\log_2 z}$.

Таким чином, $x = \pm\sqrt{\log_2\sqrt{\log_2 z}} = \pm\sqrt{0{,}5\log_2\log_2 z}$.

Звідси $\log_2 \log_2 z \geq 0$, $\log_2 z \geq 1$,$z \geq 2$.

Відповідь: $z \geq 2$.

Отож ми бачимо, що задачі на показниково-логарифмічні рівняння дають великі можливості в позакласній роботі та спрямовують розвиток логічного мислення.

Список використаних джерел

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512с.
2. Сканави М.И. и другие Сборник конкурсных задач по математике для поступающих у вузы. Учебное пособие. – 3-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 1978. – 519с.,
3. Назаренко О.М., Назаренко Л.Д. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності. Посібник для абітурієнтів. – Суми: Видавництво «Слобожанщина», 1994. – 272с.
4. Слєпкань З.І. Методика викладання алгебри і початків аналізу. – К., Рад. школа , 1978. – 224с.

Анотація. Яковенко Анастасія. Перетворення показниково-логарифмічних виразів у позакласній роботі. *У статті розглянуто роль математики для учнів та продемонстровано основні типи задач на показниково-логарифмічні вирази.*

Ключові слова: *показник, логарифм, перетворення, рівність.*

Abstract. Yakovenko Anastasia. Converting index-logarithms in extracurricular work. *The article deals with the role of mathematics for students and demonstrates the main types of problems in logical and logarithmic expressions.*

Keywords: *indicator, logarithm, transformation, equality.*

Яременко Юлія

Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Інформатика)»

mrs.iaremenko@gmail.com

Науковий керівник – О.В. Семеніхіна

ПРО ПІДХОДИ ДО ВИКОРИСТАННЯ КОМП’ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАННІ АНГЛІЙСЬКОЇ МОВИ

Комп’ютерні технології змінили спосіб спілкування, ведення бізнесу, розваг, створення та управління інформацією. Оскільки освіта в основному включає в себе інформацію та комунікацію, то цілком природно, що ці технології, з широким спектром інформаційних послуг вплинули на освіту. Науково-педагогічні дослідження описують різні шляхи, якими комп’ютерні технології можуть підтримувати освіту: як засіб візуалізації [5; 6] та контролю знань [7], полегшення спілкування суб’єктів освітнього процесу [9], збільшення обсягу навчального матеріалу [8] тощо.

Згідно з J. Cradler, M. Freeman та M. L. McNabb нинішня система освіти стикається з новим викликом: встановити та впровадити стратегії для ефективного використання комп’ютерних технологій у навчанні. Велика кількість дослідників працювали над цією проблемою і запропонували різні моделі та підходи, за допомогою яких комп’ютерні технології можуть бути включені до навчання. Їх узагальнення сприяло виділенню трьох шляхів для успішної інтеграції інформаційних технологій:

1) використання програмного забезпечення для підвищення рівня навченості студентів;

2) використання завдань на основі проблем та їх вирішення засобами комп'ютерних технологій;

3) створення конструктивного віртуального навчального середовища. [8]

Нині заклади освіти активно використовують потенціал комп'ютерних технологій для підтримки навчання різних предметів, серед яких виділимо англійську мову як дисципліну, покликану забезпечити глобалізацію та інтеграцію України та її громадян у світовий простір. Нами вивчаються сучасні комп'ютерні технології навчання англійської мови. Наразі за аналізом наукових джерел можемо представити шляхи використання комп'ютерних технологій у навчанні англійської мови [1]:

1) **віртуальне чи онлайнове навчання** – відкриті та закриті освітні ресурси, що доступні для будь-якого користувача через мережу Інтернет. Вони є важливим елементом інфраструктури навчання. Наразі є важливим є забезпечення їх якості, цілісності та коректності, їх доступність для студентів-інвалідів. Процедура навчання варіюється від доповнення навчальних занять у класі до проходження певних окремих навчальних курсів та програм для студентів. Даний вид навчання підтримують: VET Online Training, EngConvo, Lingoloop, TEEdOnline тощо.

Інноваційні індивідуальні тренінги з найкращими англійськими тренерами, які наявні на різноманітних платформах для навчання, повністю гнучке планування для полегшення навчання, індивідуальні курсові програми, включаючи звіти про зворотній зв'язок для кожної сесії, з великою кількістю стимулюючих інтерактивних ресурсів, що оновлюються щотижня, є запорукою для підвищення соціокультурної впевненості та навичок спілкування та володіння англійською мовою (а також багатьма іншими мовами). Студенти та викладачі підключаються до віртуального класу за допомогою Інтернету та сервісу Skype, проходять інтерактивну підготовку, після чого надається індивідуальний звіт, де висвітлюються помилки, усі ключові моменти, способи та напрями вдосконалення тощо [7].

Онлайнове навчання має потенціал для підвищення продуктивності освіти за рахунок прискорення темпів навчання, використання переваг часу навчання за межами шкільного часу, зниження вартості навчальних матеріалів і раціонального використання часу вчителя [8].

2) **змішане навчання** – звичайне навчання з точковим використанням комп'ютерних технологій. Такий тип навчання передбачає використання низки типів спеціалізованого програмного забезпечення [4] :

- **електронні посібники** – електронні навчальні видання, які доповнюють підручники та містять навчальний матеріал з певного предмета, окремих розділів навчальної дисципліни, факультативного курсу або курсу за вибором, найчастіше представлені з використанням мультимедійних засобів. Серед таких згадаємо: «Basic English Grammar», «Essential Grammar in Use», «Free English Grammar», «Big Grammar Book. 101 Worksheets for English Lessons», «Lane`s English as a Second Language», «99 Fast Ways to Improve Your English» та ін. [3];
- **електронні (віртуальні) практикуми** – електронні навчальні збірники практичних завдань і вправ, у тому числі:
  - електронні тренажери (“MultiLingua Trainer 8.2”, “Lex! 0.5.1”, English Quizzes, Worksheets);
  - електронні засоби для організації контролю навчальних досягнень учнів – комп'ютерні програми, призначені для створення тестів і проведення тестування (ADSoft Tester, Test-W та ін.);
- **мультимедійні засоби ілюстративного і довідникового спрямування:**
  - електронні колекції зображень різних об'єктів (карти, креслення, рисунки та ін.) із засобами навігації та пошуку;

- електронні граматичні хрестоматії – електронні навчальні видання літературно-художніх, історичних та інших друкованих, музичних творів, творів образотворчого чи кіномистецтва або їх фрагментів (Драгункін А. Н. «Хрестоматія англійської мови»);
- електронні енциклопедії - електронні довідникові видання, що містять основні відомості з однієї чи кількох галузей знань і практичної діяльності, подані у коротких статтях, доповнені аудіо- та відеоматеріалами, засобами пошуку та відбору довідникових матеріалів (“Encyclopedia Britannica 2012 Ultimate Reference Suite”);
- електронні словники – електронні довідникові видання словників державної або іноземних мов, що містять засоби пошуку слів та словосполучень і доповнені можливістю прослуховування фрагментів словника (“ABBYY Lingvo 12”, “Мультилекс” та “Мультитран”,“Onelook Dictionary”). [4]

На нашу думку, використання комп’ютерних технологій є доцільним для підтримки викладання та навчання, оскільки підвищується ефективність навчального процесу щодо формування знань, умінь і навичок використання іноземної мови, успішну організацію індивідуальної або групової роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Березовський, В.С. Створення електронних навчальних ресурсів та онлайнове навчання : Навч. посіб. / В.С. Березовський, І.В. Стеценко, І.О. Завадський. – К. : BHV, 2011. – 208 с.
2. Жарких, Ю.С. Міжнародні стандарти електронних навчальних матеріалів/ Ю.С. Жарких, Ю.В. Рудник // Вісн. Київ. ун-ту. Кібернетика. – 2005. – №6. – С. 60-62.
3. Информационные инновационные технологии в профессиональном образовании [Текст] : учеб. пособие / Ю. С. Брановский, Т. Л. Шапошникова ; Кубанский гос. технологический ун-т. - Краснодар : Издательство КубГТУ, 2001. - 415 с.: ил. - Библиогр.: с. 394
4. Програмні засоби навчання профільного предмету. Навчання в Інтернеті. Програмні засоби навчання іноземних мов. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://stud-msk.ho.ua/inf/81.htm
5. Семеніхіна О. В. Уміння візуалізувати навчальний матеріал засобами мультимедіа як фахова компетентність учителя / О. В. Семеніхіна, А. О. Юрченко // Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія «Педагогіка. Соціальна робота». – Ужгород : Видавництво УжНУ «Говерла». – 2014. – Випуск 33. – С. 176-179
6. Семеніхіна О.В. Про візуалізацію навчального матеріалу засобами flash-технологій (на прикладі вивчення тригонометричних функцій) / А.О. Юрченко, А.В. Логвін, О.В. Лаштун, К.М. Безверха, О.В. Семеніхіна // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Вип. 1 (11). – С. 128-132.
7. Clarc D. Blended Learning / D. Clarc. – CEO Epic Group plc, 52 Old Stein, Brighton BN1 1NH, 2003. – 44 p.
8. Cradler, J., Freeman, M., & McNabb, M.L. (2002, September). Research implications for preparing teachers to use technology. Learning & Leading with Technology. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://books.google.com.ua/books?id=MfwiAQAAQBAJ&pg=PT51&lpg=PT51&dq=Cradler,+Freeman+%26+McNabb&source=bl&ots=4_mheq9kr4&sig=ACfU3U0nQoEkxL7eHFjBgMV8peEjZC-H0Q&hl=ru&sa=X&ved=2ahUKEwi25bbbjNDhAhXBmIsKHWSpADgQ6AEwAXoECAUQAQ#v=onepage&q=Cradler%2C%20Freeman%20%26%20McNabb&f=false

9. Ringstaff, C., Kelley, L. (2002). The learning return on our educational technology investment. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.wested.org/cs/we/view/rs/619
10. Williamson, Janatan. Character Development in Blender 2.5 / Janatan Williamson; – USA : Course Technology/ CENGAGE Learning, 2012. – 473 p.

Анотація: У статті коротко розглянуто підходи до використання комп’ютерних технологій у навчанні англійської мови: віртуальне і змішане навчання.

Ключові слова: *інформатика, англійська мова, комп’ютерні технології, віртуальне навчання, змішане навчання.*

Summary: The article deals with the approaches of usage the computer technologies for both teaching and learning English: virtual and blended learning.

Key words: *Computer Science, English language, computer technology, virtual learning, blended learning.*

Вакал Юлія
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
julia.vakal18@gmail.com
ORCID ID 0000-0002-8722-7683

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ У МАЙБУТНІХ МАГІСТРІВ ОСВІТИ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ФАХОВИХ ДИСЦИПЛІН

АНОТАЦІЯ.

Впровадження авторської моделі формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін вимагало проведення педагогічного експерименту, який передбачав порівняння навчальних досягнень майбутніх магістрів освіти стосовно сформованості у них аналітичної компетентності.

У статті подано окремі результати педагогічного експерименту з формування аналітичної компетентності у майбутніх магістрі освіти у процесі вивчення фахових дисциплін. Здійснено аналіз констатувального й формувального етапів педагогічного експерименту, наведено динаміку змін рівнів сформованості аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін за показниками. Для оцінювання рівня формування аналітичної компетентності у майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін нами виокремлено критерії, які відповідають компонентам досліджуваного поняття: теоретичний - інформаційно-логічний, технологічний - процесуальний, особистісний - оцінний. На основі проведеного дослідження зроблено висновок про ефективність запропонованої моделі формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін, що підтверджено статистичними методами на рівні значущості 0,05.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *педагогічний експеримент; аналітична компетентність; майбутній магістр освіти; компоненти, критерії.*

Сучасне реформування освітньої галузі передбачає оновлення змісту, форм і методів професійної підготовки магістрів освіти. Їх підготовка передбачає формування навичок організації і проведення експериментальних педагогічних досліджень.

Мета дослідження – подання окремих результатів педагогічного експерименту з формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін.

Педагогічний експеримент – метод педагогічних досліджень, під час якого відбувається активний вплив на педагогічні явища шляхом створення нових умов, котрі випливають з мети дослідження [5]. Завданням педагогічного експерименту є з’ясування порівняльної ефективності проваджених у освітній процес технологій, методів, прийомів, нового наповнення тощо.

Одиницею спостереження у нашому експерименті виступав студент, який отримував кваліфікацію магістра освіти з певної спеціальності у закладі вищої освіти. Основні ознаки, котрі вивчаються у процесі педагогічного експерименту, зумовлені виділеними критеріями та показниками ефективності моделі.

Метою педагогічного експерименту була перевірка ефективності розробленої моделі формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін, яка обумовила низку завдань експериментального дослідження:

- проаналізувати стан сформованості аналітичної компетентності у майбутніх магістрів освіти;
- виявити недоліки та переваги традиційної методичної системи навчання магістрів освіти закладів вищої освіти;
- визначити шляхів формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти;
- визначити рівень логічного мислення, роботи з інформацією майбутніх магістрів освіти;
- визначити рівень умінь застосовувати методи аналізу, умінь застосовувати ІТ для аналізу майбутніми магістрами освіти;
- визначити рівень самооцінки, здатності до самовдосконалення;
- розробити методичні рекомендації щодо організації педагогічного експерименту із використання сучасних ІТ технологій;
- перевірити ефективність компонентів розробленої моделі формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти на основі особисто-орієнтованого, системного, інформаційного та діяльнісного підходів у процесі навчання магістрів освіти;
- проаналізувати, статистично опрацювати й інтерпретувати отримані дані.

Педагогічний експеримент з формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін здійснювався впродовж 2017-2020 рр. й охоплював три етапи – пошуковий, констатувальний, формувальний.

Пошуковий етап передбачав: детальний теоретичний аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури для визначення ступеня розробленості досліджуваної проблеми; вибір теми дослідження; формулювання мети та завдань дослідження; вивчення практичного досвіду з досліджуваної проблеми.

Під час *констатувального етапу* педагогічного експерименту застосовувалися пасивні методи дослідження. Було здійснено теоретичний аналіз педагогічної документації з обраної теми; обґрунтовано теоретичні та методичні основи дослідження; визначено його вихідні положення; розроблено програму дослідження; визначено мету, завдання та методи дослідження; вивчено передовий педагогічний досвід.

Під час *формувального експерименту* (2018-2020 рр.), який здійснювався на базі Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, ДВНЗ "Ужгородський національний університет", Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка, Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, КУ Сумської спеціалізованої школи I-III ст. №2 ім. Д.Косаренка, досліджувалася взаємодія компонентів моделі формування аналітичної компетентності у майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін для доведення її ефективності.

Здійснення розрахунків та подальший аналіз отриманих даних відбувалися з використанням статистичних методів. Обраний математичний інструментарій надає змогу детально опрацювати емпіричні дані, що гарантує вірогідність отриманих результатів і, як наслідок, надає змогу спростувати або підтвердити дієвість запропонованої нами моделі.

Загальна кількість учасників експерименту складала 368 особи, з яких 322 – студенти з різних ЗВО України, 29 – викладачів ЗВО, 17 – вчителів закладів середньої освіти міста Суми.

До контрольної групи (КГ) увійшли 168 студентів, навчання яких здійснювалося за традиційними підходами та планами підготовки майбутнього магістра освіти. До експериментальної групи (ЕГ) – 154 студенти, навчання яких з фахових дисциплін здійснювалося за авторською моделлю, що базувалася на удосконаленні змісту окремих фахових дисциплін, впровадженні спецкурсу та використанні обраних форм, методів і засобів навчання. Групи, котрі брали участь в експерименті, не обиралися спеціально, тому в них були студенти з різною успішністю з фахових дисциплін. Зауважимо, що всі вони навчалися за подібними навчальними програмами. Матеріально-технічне забезпечення також є подібним. Формування КГ та ЕГ здійснювалося таким чином, щоб забезпечити статистичну вірогідність рівня знань магістрів обох груп.

Для визначення рівнів сформованості аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у відповідності до її складових нами визначено критерії і показники: теоретичний критерій характеризується показником «Логічне мислення» та «Робота з інформацією», технологічний критерій – показниками «Уміння застосовувати методи ІТ» та «Уміння застосовувати ІТ для аналізу», особистісний критерій – показником «Здатність до самооцінки, самовдосконалення». Описані критерії характеризують три рівні сформованості аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін – елементарний, середній та достатній [1; 2].

Логічне мислення – визначається здатністю мислити логічно. За допомогою цього показника визначаємо, чи може майбутній магістр освіти на підставі наявної у нього інформації зробити правильний висновок і таким чином докопатися до істини. Аналітичність є важливою характеристикою мислення. Вона являє собою готовий компонент здатності теоретизувати, відшукувати причинно-наслідкові зв'язки між явищами, становить основи загальних здібностей і необхідна для успішного оволодіння різноманітними видами діяльності. Опрацювання результатів педагогічного експерименту за показником «Логічне мислення» полягало в дослідженні рівня розвитку логічного мислення майбутніх магістрів освіти. На основі відповідей за методикою «Числові ряди» робиться висновок про рівень розвитку логічного мислення майбутніх магістрів освіти. Дана методика спрямована на дослідження аналітичності мислення.

Робота з інформацією як показник характеризується сформованістю умінь працювати з різними форматами й обсягами даних. Цей показник свідчить, як вправно магістр освіти може застосовувати аналітичні знання і вміння в освітній та майбутній професійній діяльності. Методика статистичного опрацювання результатів педагогічного експерименту за показником «Робота з інформацією» полягала в організації перевірки теоретичних знань з елементарної математики, вмінь працювати з інформацією, здатність аналізувати та здійснювати математичні розрахунки. За результатами виконаних індивідуальних завдань можна говорити і про інтелектуальний розвиток магістра освіти [4].

Уміння застосовувати методи аналізу – сформованість умінь аналізувати й узагальнювати інформацію, виділяти головні аспекти даної проблеми. Цей показник представляє, наскільки у майбутнього магістра освіти сформовані вміння застосовувати методи аналізу у навчальній та професійній діяльності. Перевірка показника «Уміння застосовувати методи аналізу» здійснювалася шляхом виконання індивідуальних завдань. У якості завдання студентам пропонувалося трансформувати п’ять сторінок тексту навчального матеріалу в одну сторінку інфографіки, зберігаючи при цьому основні відомості та сутність проблеми.

Уміння застосовувати ІТ для аналізу – сформованість умінь обробки та представлення даних педагогічного дослідження з використання ІТ. Даний показник характеризує здатність використовувати інформаційні технології для представлення результатів власних педагогічних досліджень. Майбутнім магістрам освіти пропонувалося за допомогою програмного забезпечення (пакету аналіз Excel) представити описову статистику дослідження, побудувати гістограму результатів експерименту на його початку [3].

Самооцінка, прагнення до удосконалення – сформованість критичного погляду на власну професійну діяльність, здатності адекватно оцінювати результати власних досягнень та усіх учасників освітнього процесу, сформованість умінь здійснювати контроль та самоконтроль своєї діяльності, аналізувати ефективність методів, прийомів, засобів педагогічної діяльності та технологій, які використовуються у процесі вивчення фахових дисциплін, вдосконалювати власну педагогічну майстерність з їх використання. Методика статистичного опрацювання результатів педагогічного експерименту за показником «Здатність до самооцінки, самовдосконалення» рефлексивної складової полягала в проведенні експрес-діагностики рівня самооцінки, прагнення до удосконалення.

Динаміку рівнів сформованості **аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін** за кожним з показників візуально відображено на рис. 2-6.

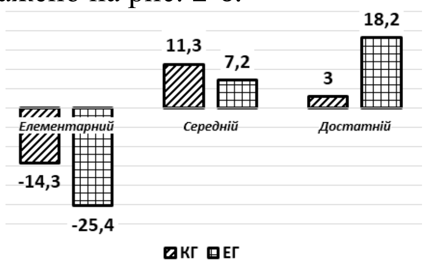


Рис. 2. Динаміка рівнів за показником «Логічне мислення»

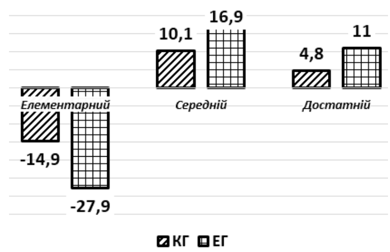


Рис. 3. Динаміка рівнів за показником «Робота з інформацією»

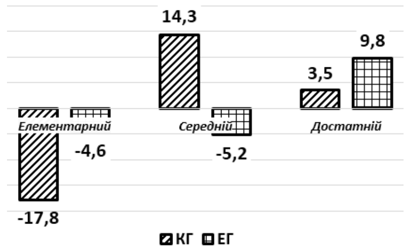


Рис. 4. Динаміка рівнів за показником «Уміння застосовувати методи аналізу»

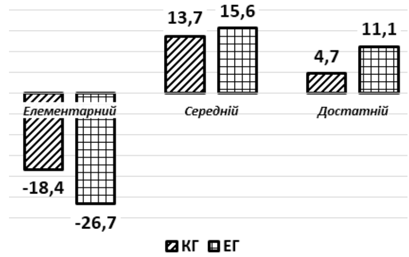


Рис. 5. Динаміка рівнів за показником «Уміння застосовувати ІТ для аналізу»

Рис. 6. Динаміка рівнів за показником «Самооцінка, прагнення до удосконалення»

Як бачимо, позитивна динаміка після експерименту спостерігається в обох групах, але в експериментальній групі більш інтенсивно.

Зокрема, в ЕГ найбільшої динаміки набув показник «Робота з інформацією» на низькому рівні (-27,9%), який переріс у (16,9%) середнього і (11,0%) достатнього. Це означає, що студенти ЕГ набували знань про можливості обробки інформації, більш інтенсивно, у них сформувалися уміння та навички аналізувати, критично мислити, оцінювати ситуацію тощо. Пояснюємо це оволодінням майбутніми магістрами освіти уміннями і навичками працювати з інформацією різними способами .

Найменшої динаміки в ЕГ набув показник «Уміння застосовувати методи аналізу» (9,8% на достатньому рівні) за рахунок негативної динаміки на низькому та середньому рівнях (-4,6% та -5,2% відповідно), що пояснюємо не достатньо сформованими знаннями про методи аналізу. Причиною цього є відсутність у деяких навчальних планах магістрів освіти дисципліни «Методологія наукового дослідження». Студенти набули умінь створювати інфографіку (трансформуючи текст вмістом 5 сторінок на 1 сторінку), але у більшості студентів це здійснювалось з труднощами, з причини недостатньо сформованих знань про методи аналізу. У студентів сформувались навички працювати з інформацією застосовуючи методи аналізу, створювати інфографіку.

Перевірка статистичної подібності вибірок здійснювалася за критерієм Стьюдента з використанням статистичних функцій MS Excel на рівні значущості 0,05 та наступними гіпотезами: H_0: $\mu_{ЕГ} = \mu_{КГ}$, тобто середні однакові; H_a: $\mu_{ЕГ} \neq \mu_{КГ}$, тобто середні статистично різні.

Критерій Стьюдента оцінки середніх для кожного показника у контрольній та експериментальній групах дає підстави стверджувати, що в ЕГ середній бал за кожним із обраних показників статистично вищий.

Отже, проведений статистичний аналіз результатів педагогічного експерименту підтвердив позитивну динаміку у рівнях сформованості аналітичної компетентності в контрольній і в експериментальній групах, що підтверджує ефективність реалізації розробленої моделі формування аналітичної компетентності у майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін.

Висновки. Розроблена і представлена модель формування аналітичної компетентності у майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін цілісна і структурована, включає взаємопов'язані компоненти. Реалізація моделі здійснювалась за допомогою взаємообумовлених принципів і підходів, підібраних форм, методів та засобів.

Модель формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти включає діагностику результатів навчальної підготовки, яка базується на критеріях і показниках сформованості. Зокрема, теоретичний критерій характеризується показниками «Логічне мислення», «Робота з інформацією», технологічний критерій – показниками «Уміння застосовувати методи аналізу», «Уміння застосовувати ІТ для аналізу», особистісний критерій – показником «Самооцінка, прагнення до самовдосконалення». За аналізом різних підходів до визначення рівня навчальних досягнень нами було виділено наступні рівні: елементарний, середній, достатній.

Формувальний етап педагогічного експерименту підтвердив доцільність упровадження моделі формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін, які вплинули на якісні й кількісні зміни в показниках сформованості аналітичної компетентності.

Якісні й кількісні зміни у рівнях навчальних досягнень підтверджує динаміка результатів контрольної та експериментальної груп. Аналіз результатів проведеного експерименту засвідчив успішність реалізації авторської моделі формування аналітичної компетентності у майбутніх магістрів освіти у процесі вивчення фахових дисциплін.

Перспективним надалі бачимо висвітлення інших результатів педагогічного експерименту.

Список використаних джерел

1. Антонюк Л. В. Критерії та рівні готовності майбутнього вчителя до навчально-дослідницької діяльності / Л. В. Антонюк // Наука і освіта – Одеса: Південний науковий центр НАПН України, 2012 − № 8 / CVIX, листопад. – С.4−8.
2. Вакал Ю.С. Обґрунтування моделі формування аналітичної компетентності майбутніх магістрів освіти у процес вивчення фахових дисциплін. *Фізико-математична освіта: науковий журнал*, 2019. Випуск 4(22). Ч.2. С. 91-95
3. Вакал Ю.С. Про використання інформаційних технологій при формуванні навичок аналізу у майбутніх магістрів освіти // «Наукові досягнення, відкриття та шляхи розвитку педагогічної науки»: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції: 24-25 травня 2019 р., 2019. – м. Запоріжжя. – С. 59-61.
4. Вакал Ю.С. Про питання використання інфографіки для візуалізації навчального матеріалу // «Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності»: матеріали II Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції (з міжнародною участю): 15-16 травня 2019 року на базі факультету математики, фізики і технологій Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. – Електронне наукове видання. – С.142-147.
5. Кострица Н.М. Ділові ігри в підготовці фахівців до управлінської діяльності навчально-методичний посібник / Н. М. Кострица, В. І. Свистун, В. В. Ягупов. – Київ : НМЦ АО, 2005. – 53 с.

References

1. Antonyuk LV Criteria and levels of readiness of the future teacher for teaching and research activities / LV Antonyuk // Science and Education - Odessa: Southern Research Center of the National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine, 2012 - № 8 / CVIX, November. - P.4−8.
2. Vakal Yu.S. Substantiation of the model of formation of analytical competence of future masters of education in the process of studying professional disciplines. Physical and mathematical education: scientific journal, 2019. Issue 4 (22). Part 2. Pp. 91-95
3. Vakal Yu.S. On the use of information technology in the formation of analysis skills in future masters of education // "Scientific achievements, discoveries and ways of development of pedagogical science": materials of the International scientific-practical conference: May 24-25, 2019, 2019. - Zaporozhye. - P. 59-61.
4. Vakal Yu.S. On the use of infographics for the visualization of educational material // "Mathematics and Informatics in Higher Education: Challenges of Modernity": Proceedings of the II All-Ukrainian Scientific and Practical Internet Conference (with international participation): May 15-16, 2019 at the Faculty of Mathematics, Physics and Technologies of Vinnytsia State Pedagogical University named after Mykhailo Kotsyubynsky. - Electronic scientific publication. - P.142-147.
5. Kostritsa NM Business games in the preparation of specialists for the management of educational and methodical manual / NM Kostrytsya, VI Svistun, VV Yagupov. - Київ: НМЦ АО, 2005. - 53 с.

RESULTS OF THE STUDY OF THE EFFICIENCY OF THE MODEL OF FORMATION OF ANALYTICAL COMPETENCE FUTURE MASTERS OF EDUCATION IN THE PROCESS OF STUDYING PROFESSIONAL DISCIPLINES

ABSTRACT. The introduction of the author's model of formation of analytical competence of future masters of education in the process of studying professional disciplines required a pedagogical experiment, which involved comparing the educational achievements of future masters of education in terms of their analytical competence. The article presents some results of a pedagogical experiment on the formation of analytical competence in future masters of education in the process of studying professional disciplines. The analysis of the ascertaining and formative stages of pedagogical experiment is carried out, the dynamics of changes of levels of formation of analytical competence of future masters of education in the course of studying of professional disciplines on indicators is resulted. To assess the level of formation of analytical competence in future masters of education in the study of professional disciplines, we have identified criteria that meet the components of the concept: theoretical - information-logical, technological - procedural, personal - evaluation. Based on the study, a conclusion was made about the effectiveness of the proposed model of formation of analytical competence of future masters of education in the study of professional disciplines, which is confirmed by statistical methods at the level of significance of 0.05.

Key words: pedagogical experiment; analytical competence; future master of education; components, criteria.

Алфавітний покажчик

Наукове видання

СТУДЕНТСЬКА ЗВІТНА КОНФЕРЕНЦІЯ

Збірник наукових праць

ВИПУСК 13
Том 1

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск
Ю.В. Хворостіна

Комп'ютерна верстка
Ю.В. Хворостіна

Фізико-математичний факультет
СумДПУ імені А.С. Макаренка
вул. Роменська, 87
м. Суми, 40002
тел. (0542) 68 59 10

http://fizmatsspu.sumy.ua