ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Наукові та методичні засади математичної освіти

Наукові та методичні засади фізичної освіти

Інформаційні технології та їх використання

Фізико-математичний факультет
Сумського державного педагогічного університету
імені А.С. Макаренка

ВИПУСК 1 (8)
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Збірник наукових праць

ВИПУСК 1 (8)

Суми – 2016

Друкується згідно з рішенням вченої ради фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка

Ф45 Фізико-математична освіта: Зб. наукових праць. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2016. – № 1 (8). – 50 с.

До збірника увійшли матеріали доповідей старшокурсників та викладачів фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, які обговорювалися на звітній науковій конференції викладачів та студентів у квітні 2016 року.

Статті презентують результати кваліфікаційних робіт та дисертаційних досліджень в галузях фізики, математики та використання інформаційних технологій в освіті.

Матеріали подаються в авторській редакції.

ЗМІСТ

НАУКОВІ ТА МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

Віта Гризун
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
vitaliya.gryzun@mail.ru
Науковий керівник – О.О. Одінцова

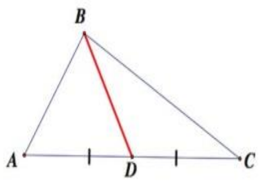
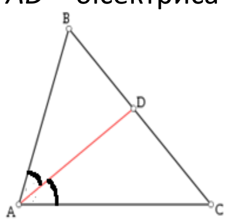
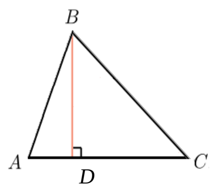
ЛІНІЇ В ТРИКУТНИКУ

На зламі XIX-XX століть завдяки великій кількості робіт, присвячених трикутнику, утворився розділ планіметрії – «нова геометрія трикутника». Серед теорем про трикутник є такі, вивчення яких дозволяє істотно розширити коло розв’язання геометричних задач. Значущість їх полягає насамперед у тому, що з них або з їх допомогою можна вивести більшість теорем геометрії, які слугують основою багатьох подальших висновків.

Не дивлячись не те, що трикутник є чи не найпростішою геометричною фігурою, він має багато важливих і цікавих властивостей, до яких зводяться властивості інших, але більш складних фігур.

Розглянемо основні лінії трикутника та властивості, що пов’язані з ними.

Таблиця 1

<table>
<tr><th>Основні лінії</th><th>Медіана</th><th>Бісектриса</th><th>Медіана</th></tr>
<tr><td>Означення</td><td>відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою його протилежних сторін. [1]
BD – медіана
</td><td>відрізок бісектриси кута, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони. [2]
AD – бісектриса
</td><td>перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону. [3]
BD – висота
</td></tr>
<tr><td>Точки перетину та їх властивості</td><td>Теорема 1. [2] Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка є його центром мас.
Точку перетину трьох медіан трикутника ще називають центроїдом і вона ділить кожну медіану у відношенні 2:1.</td><td>Теорема 2. [1] Всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. Точку перетину бісектрис називають інцентром.</td><td>Теорема 3. [1] Три прямі, котрим належать висоти трикутника, перетинаються в одній точці.
Точку перетину прямих, що містять висоти трикутника називають ортоцентром трикутника.</td></tr>
</table>

Цікавими є рівнокутні та ізогональні прямі.

Означення 1. [4] *Прямі, які проходять через вершини трикутника і утворюють рівні кути з бісектрисою внутрішнього кута трикутника (рис. 1), проведеною з тієї ж вершини називаються* ***ізогональними.***

Існує багато цікавих властивостей, на основі яких потім розв'язується велика кількість задач. Наведемо одну з них і за допомогою неї розв'яжемо задачу.

Теорема 4. [4] *Для того щоб трикутник був прямокутним, необхідно і достатньо, щоб медіана і висота, які проведені з однієї вершини, були ізогональними.*

Перейдемо до розв'язування задачі на використання цього факту.

Задача 1. [4] *Визначити кути трикутника, в якому бісектриса, медіана і висота, проведені з однієї вершини, поділяють кут на чотири рівні частини.*

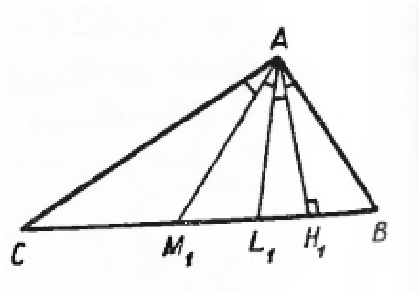


Рис. 1

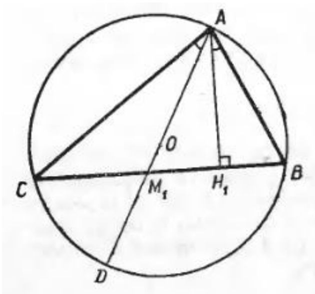


Рис. 2

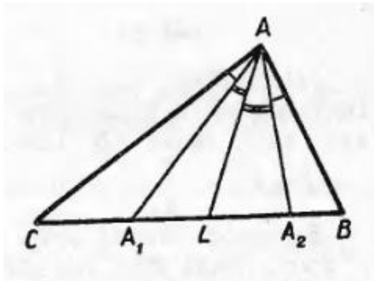


Рис. 3

Розв'язання. Оскільки трикутник *ABC (рис. 3)* – нерівнобедрений і медіана AM_1 та висота AH_1 – ізогональні, то за попередньою теоремою маємо $\angle BAC = 90^{\circ}$, а два інших кута трикутника *ABC* неважко обчислити, бо

$$\angle H_1AB = \frac{1}{4}\angle BAC = 22^{\circ}30', \angle ACB = \angle M_1AC = 22^{\circ}30',$$

$$\angle B = 90^{\circ} - 22^{\circ}30' = 67^{\circ}30' \text{(оскільки } \Delta CM_1A \text{ – рівнобедрений).}$$

У геометрії трикутника крім ізогональних прямих цікавими є так звані рівнокутні прямі.

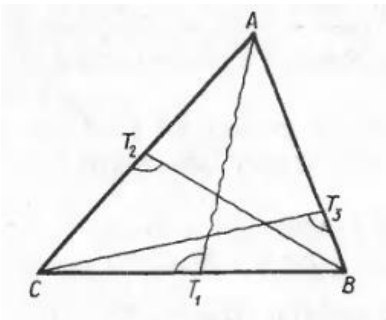


Рис. 4

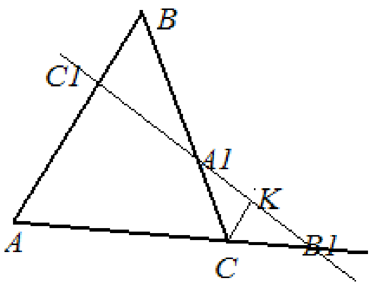


Рис. 5

Означення 2. [4] *Три прямі, кожній з яких належить одна з вершин трикутника і які перетинають протилежні вершинам сторонни під рівними кутами (рис. 4), називають* ***рівнокутними****.*

Точки перетину рівнокутних прямих з відповідними сторонами трикутника *ABC* позначають T_1, T_2, T_3.

Теорема 5. [4] *Для того щоб рівнокутні прямі перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо збігання їх з висотами трикутника.*

У геометрії трикутника існує багато таких теорем, автори яких залишилися в історії науки тільки «завдяки трикутникам». Йдеться про теореми - теорему Чеви і теорему Менелая. Обидві вони мають цікаві та численні застосування.

Відмінність цих теорем полягає в тому, що теорема Менелая розглядає трикутник, сторони або продовження сторін якого перетинаються деякою прямою (січною), у теоремі Чеви мова йде про трикутник і три прямі, що проходять через його вершини, та перетинаються в одній точці. [5].

Отже, теорема Менелая входить до золотого фонду давньогрецької математики. Ця теорема дійшла до нас в арабському перекладі книги «Сферика» Менелая Олександрійського (I—II ст. до н. е) і дозволяє легко і витончено розв`язати цілий клас задач, в яких мова йде про відношення відрізків, а також доводити належність трьох точок одній прямій.

Теорема 6 (Менелая). [6] *Нехай на сторонах AB, BC і на продовженні сторони AC (або на продовженнях сторін AB, BC і AC)* ΔABC *(рис. 5) взято відповідні точки* C_1, A_1 *і* B_1, *які не збігаються з вершинами трикутника* ΔABC. *Точки* A_1, B_1, C_1 *лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Аналогічне твердження можна сформулювати для зовнішньої січної.

Відомо, що медіани, бісектриси перетинаються в одній точці, висоти трикутника (або їх продовження) теж перетинаються в одній точці. Поставимо тепер загальне питання. Розглянемо трикутник ABC і відзначимо на його сторонах BC, AC і AB (або їх продовженнях) відповідно точки C_1,A_1і B_1. При якому розташуванні цих точок прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетнуться в одній точці?

Відповідь на це питання знайшов в 1678 році італійський інженер-гідравлік Джованні Чева (1698 р. -1734 р.).

Теорема 7 (Чеви). [7] *Дано трикутник ABC (рис. 6). На прямих AB, BC і CA позначено точки* C_1, A_1, B_1 *відповідно. Для того щоб прямі* AA_1, BB_1, CC_1 *перетинались в одній точці, необхідно і достатньо виконання умови*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Аналогічне твердження можна сформулювати, якщо точка перетину прямих буде зовні для трикутника.

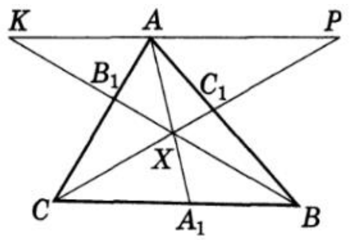


Рис. 6

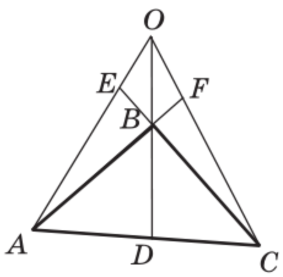


Рис. 7

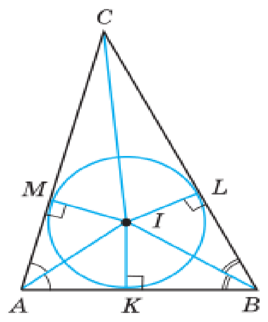
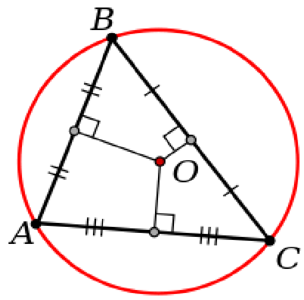
Теорема 8. [6] *Нехай* $D\epsilon\ AC$, *точки F і E відповідно на продовженнях сторін AB і BC трикутника ABC (рис. 7). Довести, що прямі AE, CF і BD перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

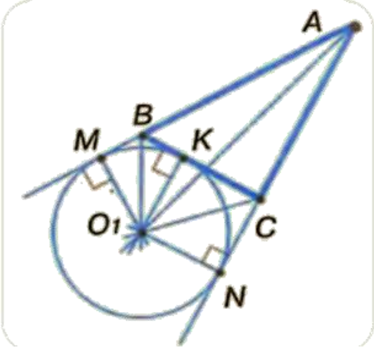
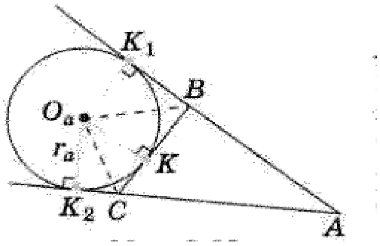
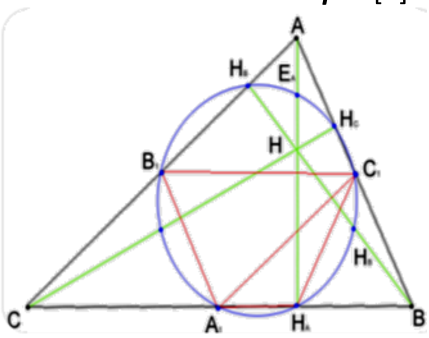
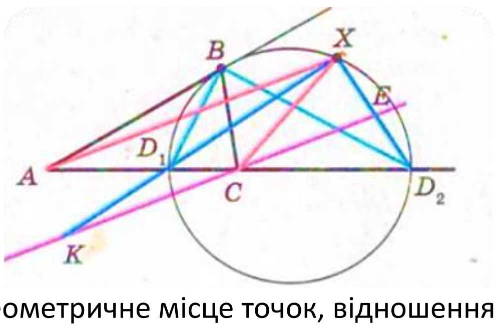
$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

Досить цікавою інформацією з геометрії є конфігурації трикутників та кіл. З найдавніших часів коло і трикутник вважали досконалими фігурами, в деяких країнах їх наділяли і наділяють магічними сенсом.

У таблиці 2 наведено цікаві факти геометрії: коло вписане та описане навколо трикутника, зовні описане коло, коло дев'яти точок (коло Ейлера), коло Аполлонія.

Таблиця 2

Вид кола	***Означення***	***Властивості***
Вписане коло	 *Коло називається вписаним в трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.* [3]	***Теорема 9***. [3] *У будь-який трикутник можна вписати коло.* ***Наслідок 1.*** [3] *Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника, тобто є* ***інцентром***.
Описане коло	 *Коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.* [3]	***Теорема 10.*** [3] *Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.* ***Наслідок 2.*** [3] *Центром кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін.*
Зовні вписане коло	Проведемо у трикутнику *ABC* бісектриси зовнішніх кутів при вершинах *B* і *C).* Точка O_1 перетину рівновіддалена від прямих *AB*, *BC*, *AC* ($O_1M=O_1K=O_1N$). Тому вона є центром кола, яке дотикається до сторони *BC* трикутника і продовжень двох інших його сторін. Таке коло називається ***зовнівписаним.*** [8]	***Теорема 11.*** [8] *Радіус зовнівписаного кола трикутника ABC, що дотикається до його сторони a, дорівнює* $\frac{S}{p-a}$*, де S - площа трикутника ABC, p – його півпериметр.*

Вид кола	*Означення*	*Властивості*
		 ***Теорема 12.*** [8] *Радіус зовні вписаного кола трикутника ABC, що дотикається до його сторони a, можна обчислити за формулами:* $$r_a = \frac{rp}{p-a}, r_a = p \cdot tg\frac{A}{2}$$ $$r_a = (p-a) \cdot ctg\frac{C}{2}$$
Коло Ейлера	У будь-якому трикутнику основи висот, середини сторін і середини відрізків, що з'єднують з вершинами трикутника, лежать на одному колі. Це коло називається ***колом дев'яти точок*** або ***колом Ейлера***. [9] 	*Радіус кола Ейлера вдвічі менший радіуса описаного кола.* [10] $$R \geq 2r_e$$
Коло Аполлонія	***Колом Аполлонія*** називається  геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є стале.	***Теорема 13.*** [4] *Радіус кола Аполлонія обчислюється за формулою* $$R_a = \frac{mn}{m^2 - n^2} \cdot AB$$

Значне місце в системі формування інтелектуальної та творчої особистості школяра приділяється вивченню геометрії як дисципліни, яка володіє величезним гуманітарним та світоглядним потенціалом. Вона розвиває логічне мислення і просторову уяву школярів, має великі можливості для показу сили наукових методів у пізнанні навколишнього світу, з'ясування процесу формування понять і шляхів виникнення, представляє важливу складову математики і є одним з основних компонентів загальнолюдської культури. Однією з базових тем систематичного курсу планіметрії є програмова тема "Трикутники".

Вивчення складових трикутника має велике прикладне і практичне значення та вимагає значної уваги як з боку вчителя та учня, так і з боку викладача та студента.

Список використаних джерел

1. Бевз Г.П. Геометрія трикутника: Навч.-метод. посіб. для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.
2. Математика. Повний повторювальний курс [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.subject.com.ua/mathematics/zno/375.html
3. Істер О. С. Геометрія 7 клас : підручник для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Освіта, 2007. – 159 с.
4. Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.
5. Мендель В.В. Теоремы Чевы и Менелая [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://khpms.khspu.ru/wp-content/uploads/M-10-1.doc
6. Теоремы Менелая, Чевы, Ван-Обеля [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://geometry2006.narod.ru/Lecture/Cheva/Cheva.htm
7. Ященко Н.А. История одной задачи [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://portfolioteka.ru/UPLOAD/2014/01/08/lyudmila_anatolevna_yaschenko111.doc
8. Апостолова Г.В. Геометрія 8 клас, дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів /Г.В. Апостолова. – К.: Генеза, 2008. – 278 с.
9. Партасюк Н. А. Задачі Ейлера / Партасюк Н. А. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://lit.govuadocs.com.ua/docs/1158/index-262255.html
10. Коло Ейлера та пряма Ейлера [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.nnstr.com/Books/book3/book1_2.htm
11. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики / А.Г. Мерзляк – Х.: Гімназія, 2008. – 240 с.

Анотація. Гризун В.О. Лінії в трикутнику. *У статті розглянуті основні положення нової геометрії трикутника: означення, властивості прямих, що вивчаються в школі, тобто медіан, бісектрис, висот, та прямих, що виходять за межі шкільного курсу, ізогональних та рівнокутних. Наведені задачі на використання властивостей останніх прямих.*

Важливим фактом для геометрії трикутника є перетин прямих в одній точці, як-то медіан, бісектрис, висот. Для довільних прямих умова їх перетину в одній точці сформульована в теоремі Чеви, що наведена в статті.

Не менш важливим фактом є належність трьох точок одній прямій. Умова цього міститься в теоремі Менелая, що теж наведено в статті.

Також, у статті наведені означення та властивості різних кіл: вписаного, описаного, зовнівписаного, кола Ейлера та кола Аполлонія. Цю інформацію структуровано в таблиці.

Ключові слова: *трикутник, лінії трикутника, медіана, висота, бісектриса, ізогональні прямі, рівнокутні прямі, коло Аполлонія, коло Ейлера, теорема Чеви, теорема Менелая.*

Аннотация. Гризун В.А. Линии в треугольнике. *В статье рассмотрены основные положения новой геометрии треугольника: определение и свойства прямых, изучаемых в школе, то есть медиан, биссектрис, высот, и прямых, не изучаемых в школьном курсе геометрии, изогональных и равноугольных. Приведены задачи на использование свойств последних.*

Важным фактом для геометрии треугольника является пересечение прямых в одной точке, таким свойством, как известно, обладают медианы, биссектрисы, высоты. и это условие для произвольных прямых сформулировано в теореме Чевы, приведенной в статье.

Не менее важным фактом является принадлежность трех точек одной прямой. Условие этого содержится в теореме Менелая, также приведенной в статье.

Также, в статье поданы определения и свойства различных окружностей: вписанной, описанной, вневписанной, окружности Эйлера и окружности Аполлония. Эта информация структурирована в таблицу.

Ключевые слова: *треугольник, линии треугольника, медиана, высота, биссектриса, изогональние прямые, равноугольные прямые, окружность Аполлония, окружность Эйлера, теорема Чевы и теорема Менелая.*

Abstract. Hryzun V. A. Lines in the triangle. *The article describes the main principles of the new geometry of the triangle. Definitions, properties of direct lines which is studied in school, i.e. medians, bisectors, heights and direct lines that extend beyond the school course: izohonally and equiangular lines. Problems on using characteristics of the latest ones are adduced (presented).*

An important fact for the geometry of the triangle is the intersection of the direct lines at one point, such as medians, bisectors, heights, and this condition for arbitrary direct lines formulated in Ceva's Theorem, which is presented in the article.

Another important fact is when three points are collinear. The condition of that is covered in Menelaus theorem, which is presented in the article too.

Besides, in the article the definition and properties of various circles: refines, described, excircle, Euler's circle and the circle of Apollonius are given in the article. This information is structured in a table.

Keywords: *line of the triangle, the median, altitude, bisector, isogonally direct, conformal lines, circles Apollonius, circle of Euler's, Cave`s theorem and the theorem of Menelaus***.**

Вікторія Зубко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
vikazubko601@gmail.com
Науковий керівник – О.О. Одінцова

СТИСЛИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД ГОМОРІ

Постановка проблеми. Навряд чи можна вказати сферу діяльності людини, де б не застосовувалися методи математичного дослідження. Математичне програмування зараз проникло в усі інші науки. Якщо раніше математичний апарат переважно використовувався як інструмент розрахунку, то тепер ставиться завдання вибору найбільш ефективного розв’язку проблеми, пошук оптимального варіанту.

Вперше завдання лінійного програмування у своїх роботах перед собою поставив російський економіст А. Н. Товстий при складанні плану перевезення вантажу між пунктами так, щоб загальний пробіг транспорту був найменшим. Математичні основи для вирішення завдань лінійного програмування були створені в 1939 році академіком Л.В. Канторовичем і його учнями.

У наш час існує доволі широке коло задач математичного програмування в математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, тварин у сільськогосподарських підприємствах тощо. Зустрічаються також задачі, які з першого погляду не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте містять вимоги дискретності змінних в явній чи неявній формах. Прикладами таких задач є вибір послідовності виробничих процесів, календарне планування роботи підприємства, планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо [4].

Аналіз досліджень і публікацій. Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п’ятдесяті роки. У цей час з’являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків зокрема працях Г. Куна і А. Таккера, Чарнес, Лемке, Р. Белмана. У період найбурхливішого розвитку математичного програмування за кордоном у Радянському Союзі не спостерігалося значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень з математичного моделювання економіки почалося в 60-80-тих роках. Серед радянських вчених того періоду слід виокремити праці В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, Н.П. Федоренка, С.С. Шаталіна, В.М. Глушкова, В.С. Михалевича, Ю.М. Єрмольєва та ін. У період становлення дискретної оптимізації, з’явилося багато робіт, присвячених цій проблемі А.О. Корбута, Ю.Ю. Фінкельштейна, А. Кофмана, А. Анрі-Лабордера, Л.С. Лесдона, Т. Ху, І.В. Сергієнка, В.П. Шила, Х. Пападімітріу, К. Стайгліца, В.С. Михайлевича.

Мета статті: дати стислу характеристику методів цілочисельного програмування.

Виклад основного матеріалу. Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремальні задачі (задачі пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання. Такі задачі ще називають оптимізаційними.

Як самостійний науковий напрямок математичне програмування сформувалось на початку 40-х років XX століття. У 1939 році відомий російський математик Л.В. Канторович опублікував роботу «Математичні методи організації та планування виробництва», в якій сформулював принципово новий клас екстремальних задач з обмеженнями і розробив ефективний метод їх розв'язання. Так було започатковано новий розділ прикладної математики, який пізніше отримав назву «лінійне програмування».

За останні роки розроблено багато ефективних методів розв'язання математичних задач оптимізації на ПК.

В залежності від виду цільової функції та системи обмежень галузі математичного програмування поділяють на [5]:

- лінійне програмування – цільова функція і функції обмежень, що входять в систему обмежень є лінійними;
- нелінійне програмування – цільова функція або одна із функцій обмежень, що входять в систему обмежень є нелінійними;
- цілочисельне (дискретне) програмування – якщо на хоча б одну змінну наложена умова цілочисельності;
- динамічне програмування – якщо параметри цільової функції і/або система обмежень змінюються в часі або цільова функція має адитивний/мультиплікативний вигляд чи сам процес прийняття рішення має багатокроковий характер.

В залежності чи відома вся інформація про процес заздалегідь галузі математичного програмування поділяють на:

- стохастичне програмування – відома не вся інформація про процес заздалегідь: параметри що входять в цільову функцію або в функцію обмежень є випадковими або доводиться приймати рішення в умовах ризику;
- детерміноване програмування – відома вся інформація про процес заздалегідь

У даній роботі зупинимось докладніше на цілочисельному програмуванні. ***Цілочисельне програмування*** – це розділ математичного програмування, який використовує змінні лише у цілочисельному вигляді. Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається ***задачею цілочисельного програмування***. До них також належать ті задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень: 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні). У тому разі, коли цілочисельних значень мають набувати не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається ***частково цілочисельною***.

Умова цілочисельності є по суті нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. У даній роботі ми розглянемо цілочисельні задачі лінійного програмування, тобто задачі в яких крім умови цілочисельності всі обмеження та цільова функція є лінійними.

Загальна цілочисельна задача лінійного програмування записується так: $\max(\min)\ F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, за умови що:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \qquad (i=\overline{1,m}) \quad (1)$$

$x_j \ge 0 \ \ (j=\overline{1,n})$

x_j – цілі числа $(j=\overline{1,n})$

Зауваження: у формулі (1) обирають один із знаків залежно від умови задачі.

Зовнішній вигляд задачі лінійного цілочисельного програмування практично не відрізняється від задачі лінійного програмування, за винятком того, що на розв'язок задачі лінійного програмування накладається додаткове обмеження: змінні набувають лише цілих значень [3, с. 151].

Припустимо, що ми розв’язали деяку задачу лінійного програмування, не враховуючи вимогу цілочисельності, і отримали наступний многокутник розв’язків ABCDO.

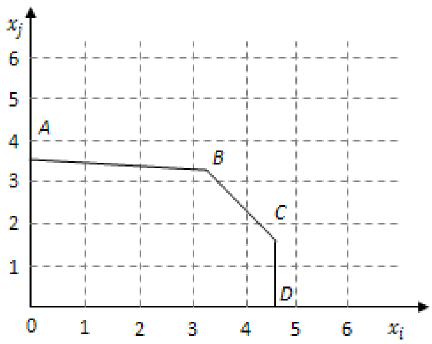


Рис. 1. Многокутник розв’язків задачі лінійного програмування

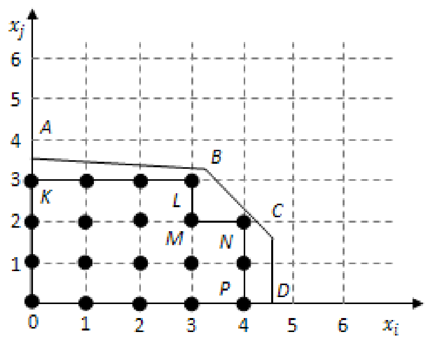


Рис. 2. Многокутник розв’язків задачі цілочисельного програмування

Якщо до даного розв’язку застосувати умову цілочисельності, то в результаті розв’язком для задачі цілочисельного програмування будуть точки з цілочисельними координатами, що містяться в многокутнику KLMNPO, в якому цілі числа позначено точками.

Для розв’язування задач математичного програмування з умовою цілочисельності використовують наступні методи: точні (метод відтинання, комбінаторні методи) і наближені методи. Зв’язок між ними подано на блок-схемі (рис. 3).

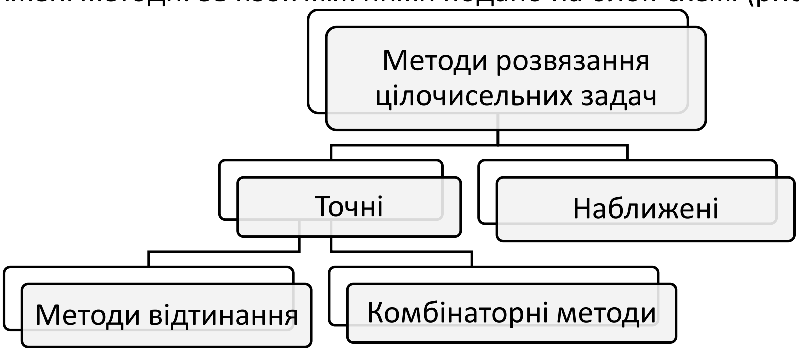


Рис. 3. Блок-схема зв’язку між методами розв’язання цілочисельних задач

Зупинимось докладніше на методі розв’язування задач лінійного цілочислового програмування, який був запропонований американським математиком Р. Гоморі в 1958 році. Це метод Гоморі, він належить до групи методів відтинання та існує у двох варіантах: перший варіант призначений для розв’язку повністю цілочисельних задач (перший алгоритм Гоморі) і другий варіант — призначений для розв’язку частково цілочисельних задач (другий алгоритм Гоморі). Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв’язків розглядуваної задачі. Тобто задачу лінійного цілочисельного програмування розв’язують спочатку без обмеження цілочисельності. Якщо одержаний розв’язок цілочисельним, то він є оптимальним планом задачі цілочисельного лінійного програмування. У противному випадку до умов початкової задачі додають лінійне обмеження, що його задовольняють усі цілочисельні плани початкової задачі, але не задовольняє одержаний нецілочисельний розв’язок, і розв’язують розширену задачу. Якщо розв'язок розширеної задачі цілочисельним, то він є оптимальним планом початкової задачі. В протилежному випадку до умов задачі додають наступне додаткове обмеження, що його задовольняють усі цілочисельні плани початкової задачі, але не задовольняє одержаний нецілочисловий розв'язок, і розв'язують задачу вже з двома додатковими обмеженнями і так далі. Описана процедура відтинання триває доти, поки на якомусь кроці не буде одержано цілочисельного оптимальний план або виявлено нерозв'язність задачі. Таким чином, розв'язування задачі лінійного цілочислового програмування зводиться до розв'язування послідовності задач лінійного програмування.

Алгоритм знаходження розв'язку методом Гоморі для цілком цілочисельних задач наступний:

1. Лінійна задача розв'язується класичним симплекс-методом, без врахування цілочисельності змінних x_j. У результаті отримують деякий оптимальний опорний план, який має наступний вигляд:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,; i = \overline{1,m}\ (2)$$

$$F_0 + \sum_{j=m+1}^{n} a_{0j}x_j = b_0\,; i = \overline{1,m}$$

2. Якщо (2) містить рівняння для яких базисні змінні $x_i = b_i$ мають дробові значення, то серед них обирають таке рівняння, яке має найбільшу дробову частину. Дане рівняння перетворюють у додаткову нерівність:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}x_j \geq \beta_i\ (3)$$

де $\alpha_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$; $\beta_i = b_i - [b_i]$; $\alpha_{ij} \geq 0$; $\beta_i \geq 0$.

Для обрання чисел $[a_{ij}]$ та $[b_i]$; існують наступні правила:

1) якщо дробові числа $[a_{ij}]$ або $[b_i]$ є додатніми числами, то $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ є цілими додатніми числами і дорівнюють цілій частині числа $[a_{ij}]$ або $[b_i]$ відповідно.

Приклад:

$a_{ij} = 2{,}3$; $[a_{ij}] = 2$; $\alpha_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}] = 2{,}3 - 2 = 0{,}3$

$b_i = 1{,}25$; $[b_i] = 1$; $\beta_i = b_i - [b_i] = 1{,}25 - 1 = 0{,}25$

2) якщо дробові числа $[a_{ij}]$ або $[b_i]$ є від'ємними числами, то $[a_{ij}]$ та $[b_i]$ є від'ємними цілими числами, які по абсолютній величині на одиницю більші за абсолютну величину цілої частини числа $[a_{ij}]$ або $[b_i]$.

Приклад:

$a_{ij} = -3\frac{1}{3}$; $[a_{ij}] = -4$; $\alpha_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}] = -3\frac{1}{3} - (-4) = \frac{2}{3}$

$b_i = -\frac{3}{5}$; $[b_i] = -1$; $\beta_i = b_i - [b_i] = -\frac{3}{5} - (-1) = \frac{2}{5}$

3) якщо $[a_{ij}]$ або $[b_i]$ є цілими числами, то $a_{ij} = 0$ і $b_i = 0$;

4) додаткова нерівність (3) повинна містити лише додатні коефіцієнти. Вона множенням на −1 спочатку приводиться до вигляду, який повинна мати нерівність у симплекс-методі згідно із стандартною формою:

$$\sum_{j=m+1}^{n} -\alpha_{ij}x_j \leq -\beta_i$$

а потім за допомогою додаткової змінної x_{n+1} перетворюється у наступне рівняння:

$$\sum_{j=m+1}^{n} -\alpha_{ij}x_j + x_{n+1} = -\beta_i$$

яке додається до оптимального опорного плану системи (2) і сумусно з ним створює псевдоплан, який містить одне від'ємне значення $b_i = -\beta_i$;

5) даний псевдоплан розв'язується двоїстим симплекс-методом. В результаті отримують новий оптимальний опорний план з додатніми значеннями b_i та a_{0j} . Якщо в новому оптимальному опорному плані існують змінні $x_j = b_i$, значення яких містять дробову частину, то знову додають одне додаткове обмеження, і процес розрахунків повторюється до отримання цілочисельних значень базисних змінних.

Ознакою відсутності розв'язку задачі є наявність у таблиці хоча б одного рядка з цілими величинами a_{ij} та вільним членом b_i , значення якого містить дробову частину. Дана ознака вказує на відсутність розв'язку у цілих числах [2, с. 50].

Алгоритм знаходження розв'язку методом Гоморі для частково цілочисельних задач аналогічний цілочисельному алгоритму, тобто, так само вводяться додаткові обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_j \geq \beta_i$$

де величини y_{ij} визначається з наступних співвідношень:

1) для нецілочисельних значень змінних x_j:

$$\gamma_{ij} = \begin{Bmatrix} a_{ij}, \text{якщо } a_{ij} \geq 0 \\ \dfrac{\beta_i}{1-\beta_i} |a_{ij}|, \text{якщо } a_{ij} < 0 \end{Bmatrix}$$

2) для цілочисельних змінних x_j :

$$\gamma_{ij} = \begin{Bmatrix} a_{ij}, \text{якщо } a_{ij} \leq \beta_i \\ \dfrac{\beta_i}{1-\beta_i} (1 - a_{ij}), \text{якщо } a_{ij} > \beta_i \end{Bmatrix}$$

Розглянемо ***приклад*** [1, с. 182-183].

Методом Гоморі знайти максимальне значення функції

$$F = 3x_1 + 2x_2 \qquad (1)$$

при таких умовах

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(j = \overline{1{,}5}\right) \qquad (3)$$

$$x_{ij} - \text{цілі } (j = \overline{1{,}5}) \qquad (4)$$

Для знаходження оптимального плану задачі (1) – (4) спочатку знаходимо оптимальний план задачі (1) – (3).

Базис	Б. К.	В. Ч.	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	13	1	1	1	0	0
x_4	0	6	1	-1	0	1	0
x_5	0	9	-3	1	0	0	1
		0	-3	-2	0	0	0
x_3	0	7	0	2	1	-1	0
x_1	3	6	1	-1	0	1	0
x_5	0	27	0	-2	0	3	1
		18	0	-5	0	3	0
x_2	2	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_1	3	$\frac{19}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_5	0	34	0	0	1	2	1
		$\frac{71}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отриманий оптимальний план X=($\frac{19}{2}$; $\frac{7}{2}$; 0; 0; 34) задачі (1) – (3) не є оптимальним планом задачі (1) – (4), оскільки x_1 та x_1 мають нецілочисельні значення. При цьому дробові частини рівні між собою. Тому для однієї із змінних складаємо додаткове обмеження. Складемо його наприклад для змінної x_2. З останньої симплекс-таблиці маємо $x_2+\left(\frac{1}{2}\right)x_3-\left(\frac{1}{2}\right)x_4=\frac{7}{2}$.

Таким чином, до системи обмежень задачі (1) – (3) додаємо нерівність $f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)x_3+f\left(-\frac{1}{2}\right)x_4\geq f\left(\frac{7}{2}\right)$ або $\left(\frac{1}{2}\right)x_3+\left(\frac{1}{2}\right)x_4=\frac{1}{2}$, тобто $x_3+x_4\geq 1$

Базис	Б. К.	В. Ч.	3	2	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	2	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_1	3	$\frac{19}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_5	0	34	0	0	1	2	1	0
x_6	0	–1	0	0	–1	–1	0	1
		$\frac{71}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_2	2	4	0	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	3	9	1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
x_5	0	32	0	0	-1	0	1	2
x_4	0	1	0	0	1	1	0	–1
		35	0	0	2	0	0	$\frac{1}{2}$

Отже, вихідна задача має такий оптимальний план X*=(9; 4; 0; 1; 32). При цьому $F_{max}=35$.

Висновки та перспективи подальших наукових досліджень.

Отже, цілочисельне програмування є розділом математичного програмування, що вивчає задачі, в яких на значення всіх або частини змінних величин накладено вимогу цілочисельності.

Методи рішення задач цілочисельного програмування розділяють на такі дві групи: точні методи (методи відтинання, комбінаторні методи) і наближені методи. Найвідоміший метод відтинань – метод Гоморі.

Упродовж останніх років все більше уваги вчені приділяють розробці ефективних методів розв'язання математичних задач оптимізації на ЕОМ для широких класів множини X і функцій *f(x).* Знання математичного програмування значною мірою може підвищити якість планування прибутку підприємства або цеху, розкрою матеріалів для виробництва продукції, рентабельності фермерського господарства, перевезення вантажів або пасажирів тощо.

Список використаних джерел

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и заданих / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986 – 319 с.

2. Гончаренко Я. В. Математичне програмування / Я. В. Гончаренко. – К.: НПУ імені М.П .Драгоманова, 2010. – 184 с.
3. Івченко І. Ю. Математичне програмування: навч. посібник / І. Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 232 с.
4. Наконечний С. І. Математичне програмування: навч. посібник / С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
5. Цілочисельне математичне програмування [Електронний ресурс] // Вікіпедія – вільна енциклопедія. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F

Анотація. Зубко В. *Стислий огляд методів цілочисельного програмування. Метод Гоморі.* *У статті подана коротка історична довідка про утворення нової прикладної математичної дисципліни – математичного програмування. Представлені різні класифікації галузей математичного програмування. Подано загальну характеристику методів розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування. Докладніше розповідається про точні методи математичного програмування. Проаналізовано два алгоритми методу Гоморі для цілком цілочисельних задач та частково цілочисельних задач. Та розв'язана алгоритмом Гоморі задача.*

Ключові слова: *цілочисельне лінійне програмування, точні методи, наближені методи, алгоритм Гоморі.*

Аннотация. Зубко В. Краткий обзор методов целочисленного программирования. Метод Гомори *В статье представлена краткая историческая справка о создании новой прикладной математической дисциплины – математического программирования. Представлены различные классификации отраслей математического программирования. Подано общую характеристику методов решения задач целочисленного линейного программирования. Подробнее рассказывается о точные методы математического программирования. Проанализированы два алгоритма метода Гомори для полностью целочисленных задач и частично целочисленных задач. И решена алгоритмом Гомори задача.*

Ключевые слова: *целочисленное линейное программирование, точные методы, приближенные методы, алгоритм Гомори.*

Abstract. Zubko V. A brief overview of the methods of integer programming. Method Gomorrah. *The article presents a brief historical background of the creation of a new applied mathematical discipline – mathematical programming. Presents various classifications of the branches of mathematical programming. Filed a General characteristic of methods for solving problems of integer linear programming. Details the exact methods of mathematical programming. Analyzed two algorithm method Gomori fully for integer tasks and partially integer tasks. And solved by the algorithm Gomory task.*

Keywords: *integer linear programming, exact methods approximate methods, the algorithm Gomorrah.*

Інна Левченко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
Innet1204@yandex.ua
Науковий керівник – О.С. Чашечникова

РОЗВИТОК ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Стрімкі зміни у сферах життя постіндустріального суспільства, вимагають від сучасної людини уміння самостійно та нестандартно мислити, прогнозувати результати, виявляти творчий підхід у будь-якій діяльності. Щоб долати труднощі, знаходити інноваційні шляхи вирішення проблем, бути успішною, людина повинна активізувати свій творчий потенціал, свою креативність.

Наш час – це час суттєвих змін у науці, освіті, інформаційному середовищі, техніці. За соціологічними дослідженнями кожні п'ять років обсяг інформації збільшується у двічі. Одним з головних завдань школи є навчити учнів вчитися, на базі отриманих знань здобувати нові знання самостійно.

Поняття «творчого мислення» набуло широкого розповсюдження на початку 50-х років ХХ ст. Вивченням даного поняття займалися як зарубіжні (З. Фрейд, К. Роджерс, Дж. Гілфорд, Е. Торренс, Р. Стернберг, А. Маслоу, Ф. Баррон, Д. Харрінгтон, Р. Мей, Т. Амабайл), так і вітчизняні (Я.А. Пономарьов, Д.Б. Богоявленська, А.М. Матюшкін, С.Л. Рубінштейн, В.Ф. Вишнякова, Б.М. Теплов) вчені. [1, с. 215-219]

Розвивати творчі здібності, творче мислення учнів, необхідно цілеспрямовано і систематично, використовуючи різні форми організації навчального процесу. Окрім традиційного уроку це можуть бути: урок–семінар, урок–подорож, урок-казка, урок–конкурс, урок-лабіринт, урок-гра, урок-змагання, урок–вікторина, інтегровані уроки [2].

Автори [2; 3] зазначають, що технологія розвитку творчого мислення передбачає формування творчих здібностей через використання різних методів роботи: метод помилок, метод проблемного навчання, метод проектного навчання, інтерактивні методи (робота в парах, ротаційні трійки, «Карусель», «Акваріум», робота в малих групах і т.д), розв'язування нестандартних задач, дидактична гра.

Для розвитку творчих здібностей учнів доцільно використовувати: математичні розвиваючі ігри («Математичне лото», «Зачаровані приклади» і т.д.), ребуси, кросворди, логічні завдання, задачі-загадки, задачі з надлишковими даними і т.д. [2]

Крім того, розвиток творчих здібностей на уроці математики може здійснюватися на будь-якому етапі уроку.

Розглянемо на прикладі пояснення нового матеріалу з теми «Многочлен. Формули скороченого множення многочленів». Проаналізувавши підручники з алгебри для учнів сьомого класу, бачимо, що майже всі автори для виведення даних формул використовують лише аналітичний метод. Розвитку дивергентного мислення, просторової уяви учнів сприяє використання геометричного методу доведення даних формул.

Розглянемо детальніше для формули різниці кубів.

З метою актуалізації опорних знань, необхідно нагадати учням геометричний зміст поняття «куб числа».

Нехай маємо два куба зі сторонами *a* та *b* *(рис. 1).* Тоді їх об'єми відповідно дорівнюють $V_1 = a^3$ та $V_2 = b^3$.

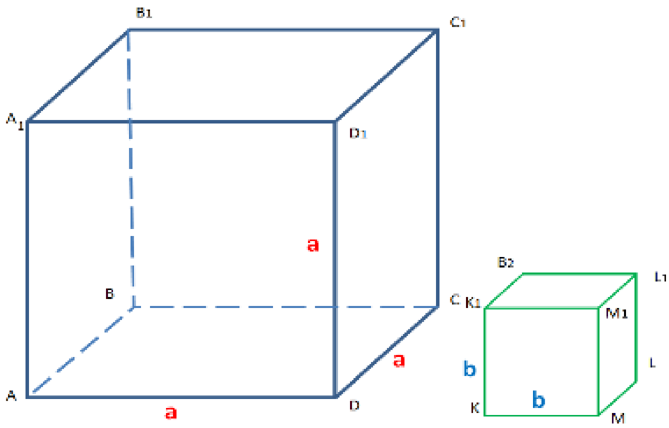


Рис. 1

В середині куба зі стороною *a* побудуємо куб зі стороною b, так щоб хоча б одна з його вершин збігалася з вершиною іншого, а три вершини лежали на ребрах великого куба *(рис. 2).* Оскільки розглядається формула різниці кубів, то «виріжемо» з куба зі стороною *a* куб зі стороною b (*рис. 3)*.

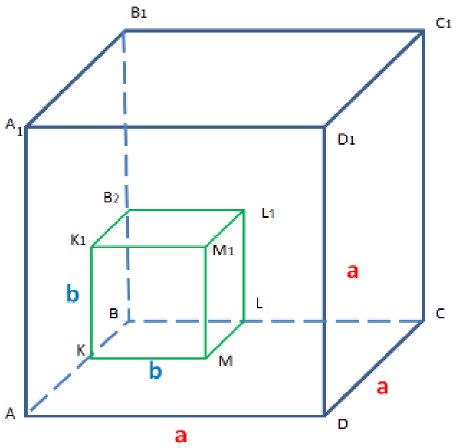


Рис. 2

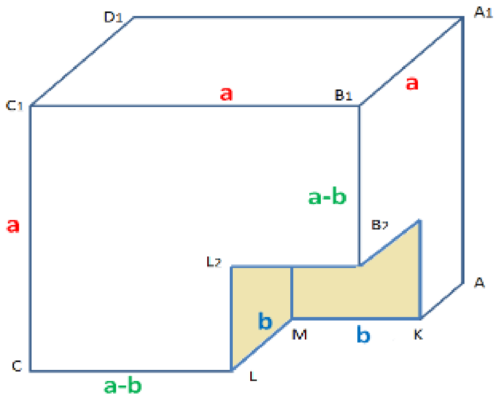


Рис. 3

Для розвитку просторової уяви учнів на цьому етапі важливо дати їм можливість спочатку уявити, а уже потім «розглянути дану фігуру з усіх сторін». Під керівництвом учителя без опори на рисунок учні мають самостійно визначити наступний крок виведення даної формули *(рис. 4).* Відріжемо паралелепіпед зі сторонами (*a – b), b, b.* Його об'єм дорівнює $V_3 = (a - b)b^2$. Отримаємо фігуру на рисунку 5.

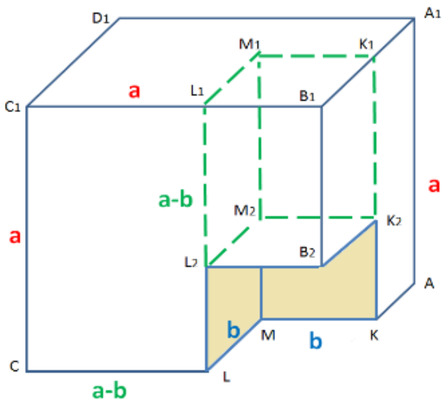


Рис. 4

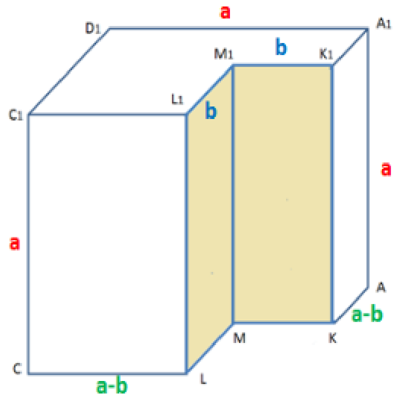


Рис. 5

Для кращого розуміння матеріалу, доцільно звертати увагу учнів на окремі елементи проектованої фігури *(рис. 6).*

Наступним кроком «відтинаємо» паралелепіпед зі сторонами *(a – b),a,b.* Об'єм даної фігури рівний $V_4 = (a-b)ab$ *(рис. 7).* Залишився паралелепіпед зі сторонами *(a – b), a, a.* Його об'єм дорівнює $V_5 = (a-b)a^2$ *(рис.8).*

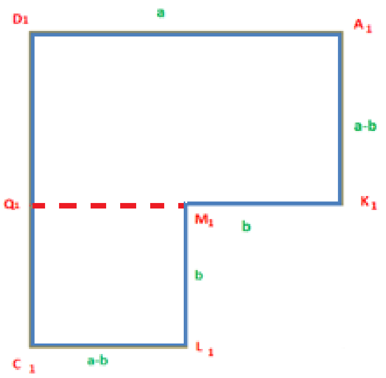


Рис. 6

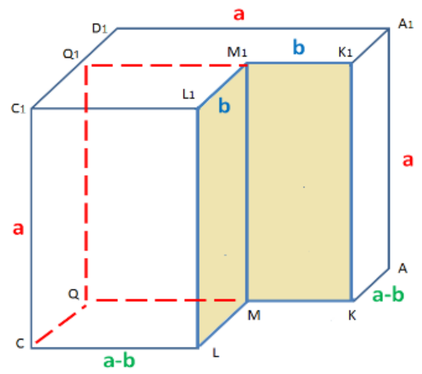


Рис. 7

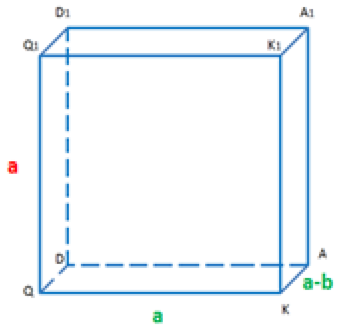


Рис. 8

Об'єм куба зі стороною *a* дорівнює сумі об'ємів вище згаданих фігур, тобто

$$V_1 = V_2 + V_3 + V_4 + V_5.$$

$$V_1 - V_2 = V_3 + V_4 + V_5.$$

Маємо, що $a^3 - b^3 = (a-b)b^2 + (a-b)ab + (a-b)a^2$.

Винесемо спільний множник за дужки:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(b^2 + ab + a^3).$$

За допомогою використання знань геометричного матеріалу вдалося вивести формули скороченого множення.

Для виведення формул скороченого множення доцільно використовувати засоби ІКТ (Gran 3D, GeoGebra, Cabri 3D і т.д).

Для розвитку творчого мислення учня на уроках математики у школі необхідно створювати умови для використання нестандартних підходів. Це сприятиме вихованню творчої особистості, здатної самостійно мислити, генерувати оригінальні ідеї, приймати сміливі, нестандартні рішення.

Список використаних джерел

1. Литвиненко С. Креативність як загальна здібність до творчості: сучасні підходи // Збірник наукових праць полтавського державного педагогічного університету імені В.Г. Короленка. – Серія «Педагогічні науки». – випуск 3 (50). – Полтава, 2006. – С. 286.
2. Велдбрехт Д.О. Розвиток креативних здібностей учнів через систему креативних вправ / Д.О.Вельдбрехт, Н.Г.Токар // Математика в школах України. – 2007. – № 29. – 94 с.
3. Волошина І. Креативне навчання на уроках математики. Формування та розвиток інтелектуально-творчого потенціалу інноваційної особистості // Математика. – 2011. – №30-31. – 96 с.

Анотація. Левченко І. Розвиток творчого мислення учнів на уроках математики. *В статті розглядається проблема розвитку творчих здібностей дітей молодшого підліткового віку. Представлені форми, прийоми та методи, які сприяють розвитку креативного мислення.*

Ключові слова: *креативність, дивергентне мислення, творчі здібності.*

Аннотация. Левченко И. Развитие творческого мышления учащихся на уроках математики. *В статье рассматривается проблема развития творческих способностей детей младшего подросткового возраста. Представленные формы, приемы и методы, которые способствуют развитию креативного мышления.*

Ключевые слова: *креативность, дивергентное мышление, творческие способности.*

Abstract. Levchenko I. Development of creative thinking of students in mathematics lessons. *In the article the problem of development of creative abilities of children of younger teens. Presented forms, techniques and methods that promote creative thinking.*

Keywords: *creativity, divergent thinking, creativity.*

Яна Лісниченко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРУП У ФІЗИЧНИХ ТЕОРІЯХ

Постановка проблеми. Уявлення симетрії відіграє величезну роль у постановці та аналізі фізичних завдань. Відомо, що закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу системи пов'язані з однорідністю часу, однорідністю і ізотропністю простору відповідно. Багато завдань вирішуються просто, якщо використовувати симетрію і, звичайно, фізичні уявлення. Форма законів всесвітнього тяжіння Ньютона і закону Кулона випливає з сферичної симетрії задачі для точкової маси (заряду) і законів збереження маси і заряду відповідно. Використання симетрії є ефективним методом, що дозволяє отримати відносно просто результати дослідження.

Часто елементи симетрії і співвідношення між ними можна виразити мовою теорії груп. У кристалографії такий підхід дозволив систематизувати різні види симетрії в кристалографічні класи.

Теорія груп є у фізиці важливим методом розгляду завдань, які важко вирішити аналітично або обчислювальними методами. Часто, виходячи з теорії груп, можна отримати принципові результати, що мають загальний характер, наприклад, в теорії елементарних частинок.

Навчитися застосовувати методи груп можна, насамперед, на конкретних прикладах. Враховуючи досить складні математичні побудови теорії груп, доцільно починати з найпростіших випадків, для засвоєння яких достатньо знань середньої школи.

Значення методу для розуміння фундаментальних законів з погляду симетрії можна проілюструвати при розгляді фермі- і бозе частинок.

На прикладі групи симетрій трикутника показується хід міркувань і суть групового підходу: побудова зображень, в тому числі і незвітних.

Мета статті – розглянути поняття теорія груп, та розкрити їх використання у фізиці.

Виклад основного матеріалу. Зазвичай розвиток математичної теорії і розширення кола її застосувань утворюють два взаємодіючих процеси: виникнення нових завдань стимулює розвиток теорії, а розвиток теорії, природно, розширює коло вирішуваних завдань. Зовсім інакше розвивався процес з теорією груп незважаючи на те, що її виникнення було пов'язане з дослідженням коренів алгебраїчних рівнянь, а знаменита теорема Галуа про нерозв'язність в радикалах алгебраїчних рівнянь була вражаючим досягненням цієї теорії на зорі її існування.

Однак, подальший розвиток теорії груп довгий час визначався тільки її внутрішньою логікою. Теорія груп встигла сформуватися в логічно завершену науку задовго до того, як з'явилися нові її застосування. Протягом тривалого періоду (близько тридцяти років) існувала готова до застосування теорія і ніхто не підозрював про її приховані можливості. Теорія груп вважалася класичним прикладом математичної теорії, досягнення якої нічого не обіцяли іншим наукам.

Положення істотно змінилося в період бурхливого розвитку квантової механіки. Виявилося, що теорія груп є надзвичайно корисним інструментом при дослідженні поведінки електронів в атомі і атомів в молекулі. Це дало поштовх до подальшого розвитку теорії груп – починаючи з тридцятих років нашого століття і по теперішній час йде безперервний процес збагачення теорії груп, помітно розширилася область її застосувань.

Теорія груп дозволяє знаходити важливі властивості, що випливають з симетрії об'єкта дослідження. Однак для цього зовсім не потрібні всі теореми, накопичені теорією груп, і всі поняття, нею створені. Доцільно відокремити ту частину теорії груп, яка потрібна при дослідженні завдань, що володіють симетрією. Цю частину теорії домовимося називати прикладною теорією груп, включаючи в це поняття не тільки відповідні теореми теорії груп, а й відповідні методи [1].

Уявлення симетрії відіграють величезну роль у постановці та аналізі фізичних завдань. Відомо, що закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу системи пов'язані з однорідністю часу, однорідністю і ізотропною простору відповідно. Багато завдань вирішуються просто, якщо використовувати симетрію і, звичайно, фізичні уявлення. Математичний запис законів всесвітнього тяжіння Ньютона і закону Кулона випливає зі сферичної симетрії задачі для точкової маси (заряду) і законів збереження маси і заряду відповідно. У багатьох конкретних завданнях: при розрахунку електричних і магнітних полів, в задачах гідродинаміки, дослідженні коливань – міркування симетрії є ефективним методом, що дозволяє отримати відносно прості кінцеві формули.

Теорія груп є у фізиці важливим методом розгляду завдань, які важко вирішити аналітично або обчислювальними методами. Часто, виходячи з теорії груп, можна отримати принципові результати, що мають загальний характер, наприклад, в теорії елементарних частинок. Навчитися застосовувати методи груп можна, насамперед, на конкретних прикладах. Значення таких методів для розуміння фундаментальних законів з погляду симетрії ілюструється при розгляді фермі- і бозечастинок.

Враховуючи досить складні математичні побудови теорії груп, доцільно починати з найпростіших випадків, для засвоєння яких достатньо знань середньої школи. Зокрема, на прикладі групи симетрій трикутника можна проілюструвати хід міркувань і суть групового підходу: побудову зображення, поділ групи на незвідні зображення.

Коливання трикутника розглядаються для того, щоб показати зв'язок спектрів з симетрією системи. У цьому випадку можна судити про поведінку частот у зовнішніх полях на основі групового підходу без складних обчислень.

Дуже важливим прикладом симетрії, створеної самою природою, є симетрія кристалів. Фізика кристалів – постійний «споживач» методів теорії груп. Ще один клас важливих прикладів – атоми в молекулі і електрони в атомі. Фундаментальну роль у фізиці «грає симетрія простору і часу». Її прояви різноманітні. У найбільш загальній формі вона виражається в тому, що всі інерціальні системи відліку фізично еквівалентні. З цього випливає, що і всі фізичні закони мають одну і ту ж форму в усіх інерційних системах відліку. Візьмемо, наприклад, закони, що керують електромагнітним полем, - знамениті рівняння Максвелла. При переході з однієї інерціальної системи відліку в іншу вони не змінюють своєї форми. Точніше, кожне окремо взяте рівняння Максвелла при такому переході змінює свій вигляд, проте вся сукупність рівнянь Максвелла після декількох тотожних перетворень повертається до первісного вигляду. Іншими словами, кожен перехід від однієї інерціальної системи відліку до іншої такої ж системі є операцією симетрії для рівнянь Максвелла. Це один із часткових проявів загальних властивостей симетрії простору і часу. Залишається відповісти на питання, яку користь можна отримати, застосовуючи методи теорії груп при дослідженні завдань, що володіють симетрією.

Розглянемо тепер специфіку фізичних завдань, що досліджуються методами прикладної теорії груп. Перша особливість таких завдань полягає в тому, що найрізноманітніші фізичні об'єкти часто мають одну і ту ж групу симетрій. Які причини цього явища і які наслідки випливають з нього? Є три основних джерела симетрії фізичних завдань:

1) симетрія простору і часу;
2) нерозрізненість елементарних частинок одного сорту;
3) симетрія «уявного світу», близького до реального світу.

Симетрія простору і часу виражається в тому, що всі інерціальні системи відліку фізично еквівалентні. Точніше, всі фізичні закони формулюються абсолютно однаково у всіх інерціальних системах відліку. Як приклад можна вказати на рівняння Максвелла. При переході з однієї інерціальної системи в іншу координати і час перетворюються певним чином один через одного. Сукупність цих перетворень утворює групу - повну групу Лоренца. Саме вона описує симетрію простору і часу. Закони фізики інваріантні щодо групи Лоренца. З цього випливає, що при переході з однієї інерціальної системи відліку в іншу перетворюються не тільки координати і час, але і всі фізичні величини, що ставляться до досліджуваних законам фізики. Якщо рівняння, що виражають ці закони, лінійні, то лінійними є й перетворення відповідних фізичних величин. Вони утворюють зображення повної групи Лоренца. Тому класифікація таких зображень природно переноситься на фізичні величини. На практиці замість повної групи Лоренца часто користуються двома її підгрупами: групою обертань і власною групою Лоренца. Це призводить до класифікації фізичних величин за поданнями цих підгруп. Саме так виникають скаляри, тривимірні вектори, тензори різних рангів, чотиривимірні вектори і тензори.

Нерозрізненість елементарних часток призводить до того, що будь-яка перестановка двох або декількох однакових частинок автоматично є операцією симетрії для будь-якої фізичної задачі, у якій фігурують ці частинки. Таким чином, і цей вид симетрії є загальним для найрізноманітніших фізичних об'єктів.

Переходячи до третього джерела симетрії фізичних завдань, пояснимо лише, що ми маємо на увазі, говорячи про симетрії уявного світу. Цей світ, хоча і уявний, не відірвано від дійсного світу. Говорячи точніше, дійсний світ, його закони можна розглядати як результат слабкого збурення уявного світу. Так, електромагнітну взаємодію протонів можна розглядати як слабке збурення; якщо, знехтувати ним, то протони нічим не відрізнятимуться від нейтронів і виникне нова симетрія - симетрія фізичних законів, що оперують нуклонами і не враховують електромагнітної взаємодії. Пошуки подібних симетрії - вони називаються вищими симетріями - виявилися дуже плідними в теорії елементарних часток [3].

Фермі- і Бозе частинки

Існування двох сортів часток різної симетрії - один з найважливіших результатів фізики XX століття. Фермі-частинки, наприклад, електрони, характеризуються тим, що в одному стані не може перебувати більше однієї частинки, що пов'язано з тим, що фермі-частинки мають напівцілий спін, Бозе- частинки мають цілий спін, в одному стані може перебувати будь-яке число частинок .

Існування двох сортів частинок випливає з принципу тотожності частинок, який слідує із квантової механіки, і групи дзеркальної симетрії. Покажемо це.

Нехай стан системи, що складається їх N однакових частинок, описується функцією, залежною від параметрів цих частинок

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{1.1}$$

У квантовій механіці - це хвильова функція і фізичний зміст має квадрат модуля цієї функції (ймовірність знайти систему в даному стані) $-|\psi|^2$. Очевидно, що при операції симетрії, наприклад, при перестановці частинок функція може змінити знак або зберегти знак. Стан при цьому не змінюється, оскільки частинки тотожні. Дія оператора перестановки двох частинок запишеться

$$\hat{P}\,\psi(x_1 \ldots x_k \ldots x_e \ldots x_N) = \pm\psi(x_1 \ldots x_k \ldots x_e \ldots x_N). \tag{1.2}$$

Власні значення оператора $p=\pm1$, що відповідає регулярному поданням групи з двох елементів - одиничного I і дзеркального відображення P:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Це уявлення розбивається на два незвідних одновимірних зображень з характерами: $\chi_1(I)=1$, $\chi_1(P)=1$ и $\chi_2(I)=1$, $\chi_2(P)=-1$. В силу тривіального результату таке подання єдине.

Якщо симетрія частинок відповідає значенню P = –1, то в одному стані не може бути більше, ніж одна частинка. Якщо частинка $x_k \ldots x_e$ знаходяться в одному стані, то їх перестановка нічого не змінює; отже, в цьому випадку

$$\psi(x_1 \ldots x_N) = -\psi(x_1 \ldots x_N) = 0, \tag{1.4}$$

тобто ймовірність такого стану дорівнює нулю. Якщо P=+1, то заборона на число часток в одному стані відсутня. Елемент симетрії P=-1 з характером (1, -1) відповідає ферміонами, що має напівцілий спін. Судження про величину спіна S (число, що характеризує власний момент частинки) випливає з того, що при обертанні в спіновому просторі хвильова функція перемножається на величину $(-1)^{2S}$.

Таким чином, існування тільки двох сортів часток є наслідком симетрії елементарних частинок, яка легко виражається мовою теорії груп.

Можна уявити собі випадок, коли в одному стані «дозволяється» перебувати не більше P частинок ($P>1$). Тоді крім бозе- і фермі частинок повинні існувати й інші частинки - груп симетрії була б складнішою (містила б і інші елементи крім I і P). Але сучасна фізика допускає тільки два сорти частинок, що відповідає групі дзеркальної симетрії [2].

Група симетрії трикутника

Група симетрій рівностороннього трикутника (рис. 1) містить 6 елементів: I – тотожність, A – поворот на 120°, B – поворот на 240°, C, D, E – відображення відносно ліній P, Q і R – відповідно. Група ізоморфна групі перестановок з трьох елементів (1, 2, 3). Легко бачити, що група має три класи I; AB, CDE, причому I, IAB – підгрупи трикутника.

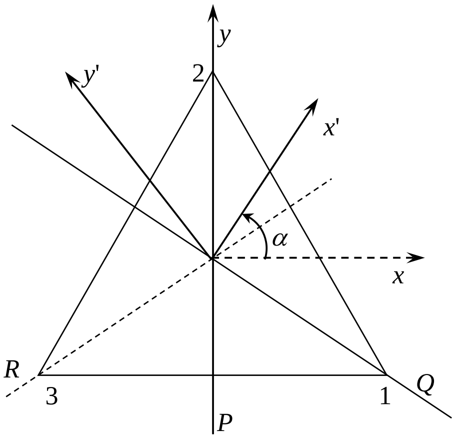


Рис. 1. Рівносторонній трикутник

Побудуємо зображення групи. Завжди існує одиничне зображення розмірності *n*=1 $D_D^{(2)}$, в якому кожному елементу ставиться у відповідність 1. Друге подання розмірності *n*=1 $D_D^{(2)}$ отримаємо, поставивши у відповідність 1 елементам LAB і -1 елементам C, D, E, що відповідає разбиттю на класи. Для побудови двомірного зображення використовуємо зображення повороту за допомогою матриці

$$F = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

де α – кут повороту системи координат (x ', y'), щодо вихідної (x, y) (рис. 1). Очевидно, що поворот трикутника на кут α відповідає повороту системи координат на кут α. Тоді легко отримати матриці

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} A = F(120°) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \\ B = F(240°) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}. \end{matrix} \tag{2.2}$$

Елемент C відповідає зміні напрямку осі $x \to -x$, , отже

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

використовуємо множення

$$E = AC, \quad D = BC,$$

Отримаємо

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Складемо таблицю характерів зображення, які визначаються як слід матриці

g	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
I	1	1	2
A	1	1	−1
B	1	1	−1
C	1	−1	0
D	1	−1	0
E	1	−1	0

Як і очікувалось, елементи одного класу в будь-якому зображенні мають однакові характери. Переконаємося, що розбиття регулярного представлення, яке в нашому випадку має розмірність n = 6 на наведені вище незвідні подання є єдиними. Скористаємося формулою

$$\sum_{i=1}^{3} n_i^2 = n. \qquad (2.5)$$

У нашому випадку це відповідає відношенню

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6. \qquad (2.6)$$

Очевидно, що число 6 можна так розбити на квадрати цілих чисел єдиним способом. Зображення розмірності $n_i = 1$ в даному випадку тільки 2 з урахуванням того, що елементи одного класу мають однаковий характер. Зауважимо, що характери кожного зображення повинні задовольняти співвідношенню

$$\sum P_k \left|\chi(C_k)\right|^2 = n. \qquad (2.7)$$

Легко перевірити, що результати, наведені в таблиці задовольняють умові (2.7). Отже, ми отримали необхідні параметри зображення групи: розбиття на незвідні зображення і характери класів. У більш складних випадках обчислення складніше, але сам хід міркувань, загалом, зберігається [4].

Висновки. Розглянуто приклади застосування теорії груп при дослідженні фізичних завдань. Показано схему визначення параметрів групи: виділення класів, характерів незвідних зображень, розбиття регулярного подання групи на незвідні зображення.

Теорія груп ефективна при формулюванні фундаментальних висновків: таких як обґрунтування існування двох сортів частинок - бозе- і фермі частинок, на які діляться всі частинки, відомі в сучасній фізиці.

При розгляді конкретних завдань теорія груп дозволяє зробити висновки про поведінку системи без складних обчислень, використовуючи уявлення про симетрії системи. Такі передбачення мають істотне значення при дослідженні спектрів.

Список використаних джерел

1. Хейне В. Теория групп в квантовой механике. – М. : ИЛ, 1963. – 522 с
2. Голод П. І. Симетрія та методи теорії груп у фізиці (дискретні симетрії). – К. : Києво-Могилянська академія, 2005. – 215 с.
3. Любарский Г.Я. Теория групп и физика. М., Наука, 1986. − 224 с.
4. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. – М.: Изд-во физ.-мат. л-ры., 1958. − 356с.

Анотація. Лісниченко Я.В. Застосування теорії груп у фізичних теоріях. *У статті розглянуто застосування теорії груп у фізичних теоріях. Показано схему визначення параметрів групи: виділення класів, характерів незвідних зображень, розбиття регулярного подання групи на незвідні зображення.*

Теорія груп ефективна при формулюванні фундаментальних висновків: таких як обґрунтування існування двох сортів частинок – бозе- і фермі частинок, на які діляться всі частинки, відомі в сучасній фізиці.

При розгляді конкретних завдань теорія груп дозволяє зробити висновки про поведінку системи без складних обчислень, використовуючи уявлення про симетрії системи. Такі передбачення мають істотне значення при дослідженні спектрів.

Ключові слова: *теорія груп, симетрія, фізичні закони, квантова механіка, фізичні величини, зображення, бозе і фермі частинки, квантова механіка.*

Аннотация. Лесниченко Я.В.. Применение теории групп в физических теориях.

В статье рассмотрено применение теории групп в физических теориях. Показана схема определения параметров группы: выделение классов, характеров неприводимых изображений, разбиение регулярного представления группы на неприводимые изображения.

Теория групп эффективна при формулировке фундаментальных выводов: как обоснование существования двух сортов частиц – бозе- и ферме частиц, на которые делятся все частицы, известные в современной физике.

При рассмотрении конкретных задач теория групп позволяет сделать выводы о поведении системы без сложных вычислений, используя представление о симметрии системы. Такие предсказания имеют существенное значение при исследовании спектров.

Ключевые слова: *теория групп, симметрия, физические законы, квантовая механика, физические величины, изображения, бозе и ферме частицы, квантовая механика.*

Abstract. Lisnichenko Y.V. Application of the theory of groups in physical theories. *In article application of the theory of groups in physical theories is considered. The scheme of determination of parameters of group is shown: allocation of classes, characters of not provided images, splitting regular representation of group into not provided images.*

The theory of groups is effective at the formulation of fundamental conclusions: as justification of existence of two grades of particles - boze-and a farm of particles on which all particles known in modern physics share.

By consideration of specific objectives the theory of groups allows to draw conclusions on behavior of system without difficult calculations, using idea of symmetry of system. Such predictions have essential value at research of ranges.

Keywords: *theory of groups, symmetry, physical laws, quantum mechanics, physical quantities, images, Bosa and farm of a particle, quantum mechanics.*

Ганна Мащенко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми

Науковий керівник – О.В. Мартиненко

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ МОДЕЛЯХ СПОЖИВЧОЇ ПОВЕДІНКИ ТА ПОПИТУ

Питанням дослідження споживчого попиту на ринку присвячено праці багатьох представників світової економічної думки: А. Маршалла, В. Парето, Л. Вальраса, Д. Хікса, Г. Касселя та ін. [2]. В Україні проблемам моделювання попиту та прогнозуванню результатів економічної діяльності підприємств присвячені доробки видатних науковців В.В. Вітлінського, В.М. Геєця, В.Я. Заруби, Т.С. Клебанової, Л.Н. Сергєєвої, Б.Я. Панасюка, В.Ф. Беседіна та ін.

Споживчий ринок − це окремі особи та домашні господарства, які купують товари та користуються послугами для особистого або сімейного споживання чи використання.

На поведінку споживача впливають психологічні, особистісні, соціокультурні фактори, фактори ситуаційного впливу, а також комплекс маркетингу фірми-виробника певного товару. Зокрема, суттєвий вплив мають референтні групи (групи людей, які безпосередньо або опосередковано впливають на поведінку споживача(члени сім'ї, друзі, сусіди, колеги по роботі тощо)).

Дослідження та прогнозування споживчого попиту є однією із найважливіших, але при цьому і найскладніших задач як кон'юнктурного, так і стратегічного аналізу ринку. Прогнозування та дослідження споживчого попиту може дати відповіді на питання: якими були об'єм, структура, рівень попиту, яка тенденція зміни попиту та її швидкість, які фактори визначають попит в досліджуваному періоді та що передбачається в майбутньому.

Розглянемо математичні співвідношення, що описують прогнозну поведінку індивідуальних споживачів визначеного типу споживчої поведінки населення у фіксовані моменти часу.

Нехай $R = \{r_{ikj}\}_{ikj}$ – матриця обсягів споживання *i*-го блага *k*-ою групою *j*-го постачальника, де I_k – множина індексів групи благ, $i_k \in I_k; J_k$ – множина індексів постачальників, $j_k \in J_k$.

Розглянемо модель, в якій група благ ставиться у відповідність з певною потребою і вважається, що всі блага групи здатні з різним ефектом задовольнити дану потребу. У цьому розумінні блага однієї групи є повністю взаємозамінними.

Придбання індивідуальним споживачем блага в обсязі r_{ikj} пов'язано з витратами грошових коштів. Характер відповідних залежностей визначається природою механізмів, що використовуються. Для механізмів з лінійною ціновою функцією це залежність наступного виду:

$$Z_{ij} = C_{ikj} \cdot r_{ikj}, i_k \in I_k, j_k \in J_k$$

Нелінійна цінова функція може бути монотонно зростаючою, випуклою вгору (такою, що стимулює споживання, наприклад «неходового» товару):

$$Z_{ikj} = a_{ikj} \cdot r_{ikj} \cdot b_{ikj}, 0 \langle b_{ikj} \langle 1, a_{ikj} \rangle 0$$

або монотонно зростаючою випуклою вниз(наприклад у випадку дефіциту товару):

$$Z_{ikj} = a_{ikj} \cdot r_{ikj} \cdot b_{ikj}, b_{ikj} \rangle 1, a_{ikj} \rangle 0$$

де C_{ikj} – ціна одиниці блага $i_к$ у j-го постачальника; a_{ikj}, b_{ikj} – параметри f_{ikj}

У цілому витрати на придбання блага складають величину Z, що визначається як $Z = \sum_{ikj} Z_{ikj}$; при цьому необхідне виконання обмежень: $r_{ikj} \le d_{ikj}, Z \le \Phi + \Delta\Phi$, де d_{ikj} – запропоноване благо $i_к$ j-м постачальником; ΔΦ – запас грошових засобів у споживачів групи, яка розглядається на початок проміжку часу, що досліджується; Φ – обсяг матеріальної (грошової) допомоги даній групі. Величини Φ і ΔΦ беруться в розрахунку на одного представника(індивіда чи домашнє господарство) групи.

Функції задоволення потреб, що встановлює залежність рівня задоволення потреб від рівня споживання благ, має вигляд:

$$F_n = \sum_{ik} \frac{\sum_{ik} a_{ij} \overline{r_{ik}}}{\sum_{k} \overline{r_{ik}}} \cdot \left(\frac{\sum_{ik} \overline{r_{ik}}}{R_{ik}} \right)^{\frac{\sum_{ik} \beta_{ik} \overline{r_{ik}}}{\sum_{ik} \overline{r_{ik}}}},$$

де $\overline{r_{ik}}$ – обсяг *i*-го блага, що споживається *k*-м класом домашніх господарств; R $_{ik}$ – матриця обсягів споживання *i*-го блага, що споживається *n*-м класом; a_{ij} – ціна одиниці *i*-го блага у *j*-го постачальника; β_{ik}– параметр, що враховує питому вагу грошових і часових витрат в утворених класах споживачів. Отже, дана функція відображає зростання задоволення потреб із збільшенням обсягів споживання.

Рівень задоволення матеріальних потреб суспільства (рівень споживання) можна виразити цільовою функцією споживання U = U(Y), де вектор змінних Y≥ 0 включає різноманітні види товарів і послуг. Ряд властивостей цієї функції зручно вивчати, використовуючи геометричну інтерпретацію рівнянь U(Y) = C, де C – параметр, що характеризує значення (рівень) цільової функції споживання; як величина C може виступати, наприклад, прибуток або рівень матеріального добробуту.

Шведський економіст Л. Торнквіст використав принцип розмежування груп товарів по типах функцій попиту від доходу і запропонував спеціальні види функцій попиту (функції Торнквіста) для трьох груп товарів: першої необхідності, другої необхідності, предметів розкоші.

Функція Торнквіста для товарів першої необхідності Y_1 має такий вигляд: $Y_1 = \frac{a_1 Z}{(Z + C_1)}$, де a_1 – верхня межа попиту; C_1 – приріст доходу. Вона відображає той факт, що зростання попиту на ці першочергові товари зі зростанням доходу поступово сповільнюється і має межу a_1 (крива попиту асимптотично наближується до прямої лінії $y_1 = a_1$).

Функція Торнквіста для товарів другої необхідності Y_2 : $Y_2 = \frac{a_2(Z - b_2)}{(Z + C_2)}$, де a_2 – верхня межа попиту; b_2 – певний рівень доходу; C_2– приріст доходу. Попит на цю групу товарів з'являється після того, як дохід досягне величини b_2.

Функція Торнквіста для предметів розкоші Y_3 визначається як: $Y_3 = \frac{a_3 Z(Z - b_3)}{(z + C_3)}$, де $a_3 > 1$; b_3 – певний рівень доходу; C_3 – приріст доходу. Функція Y_3 не має межі, попит на предмети розкоші виникає після того, як дохід Z перевищить рівень b_3. Графіки цих функцій наведено на рис. 1.

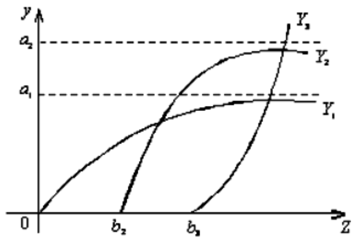


Рис. 1. Графік функції Торнквіста на товари розкоші

Розглянемо приклад залежності попиту від ціни. Нехай залежність обсягу попиту на книжкову продукцію від ціни має вигляд *y = k + Ep*, а функція витрат представлена в вигляді *C(y) = h+vy*. Задамо наступні умовні значення величин, що беруть участь в цих залежностях:

- накладні витрати на виробництво і реалізацію книжкової продукції ***h*** = 36 тис.грн.;

- питомі витрати на одиницю (один примірник) цієї продукції ***v =*** 20 грн./екз.;

- максимально можливий обсяг тиражу ***k*** = 4000 примірників;

- умовна еластичність попиту від ціни ***E =*** 40 екз./грн.

Тоді вимога до обсягу тиражу для забезпечення рентабельності визначається умовою: $y_0 \rangle \sqrt{-(-40)\cdot 36000} = 1200 екз.$

Оптимальна ціна задається формулою :

$$p_0 = \frac{20\cdot(-40)-4000}{2\cdot(-40)} = 60 грн/екз.$$

Найбільш оптимальний обсяг тиражу, що забезпечує максимум прибутку дорівнює:

$$p_0 = \frac{20\cdot(-40)+4000}{2} = 1600 екз.$$

Інтервал ціни, в межах якого забезпечується рентабельність даного видання, визначається виразом:

$$p_{1,2} = 60 \pm \frac{\sqrt{(20\cdot(-40)+4000)^2 + 4\cdot(-40)\cdot 36000}}{2\cdot(-40)} = 60 \pm 26{,}5 грн/екз.$$

Таким чином, ціна повинна лежати в межах від 33,5 до 86,5 грн. за один екземпляр; оптимальна ціна дорівнює 60 грн./екз.

Максимум прибутку, що досягається при цьому, розраховується згідно з формулою (8.10) і дорівнює

$$\max \Pi(p) = \frac{(20\cdot(-40)-4000)^2 + (36000+20\cdot 4000)\cdot 4\cdot(-40)}{-4(-40)} = 28 тис.грн.$$

Отже, можна сказати, що завдання моделювання та прогнозування споживчого попиту на товари, що випускаються підприємством, є актуальним, а впровадження таких моделей дозволить збільшити економічну ефективність і рентабельність роботи підприємства.

Список використаних джерел

1. Ламбен Ж.-Ж. Стратегический маркетинг. Европейская перспектива / Ж.-Ж.Ламбен / Пер. с фр. – СПб.: Наука, 1996. – 589 с.
2. Савченко Т.Г.Генезис теорій економічної рівноваги / Т.Г. Савченко // Економіка і регіон. – 2010. – № 1. – С. 198-206.
3. Федосеев В. В. Экономикома тематические методы и прикладные модели / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, И.В. Орлова, У.А. Половников. – 2-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 391 с.

Анотація. Мащенко Г. Математичні методи в економічних моделях споживчої поведінки та попиту. *У статті розглянуто застосування математичних методів при дослідженні економічних процесів, зокрема при аналізі та прогнозуванні споживчої поведінки та попиту.*

Ключові слова: *математичні методи, економіко – математична модель, поведінка споживача, попит.*

Аннотация. Мащенко Г. Функции в экономических моделях. *В статье рассмотрено применение математических методов при исследовании экономических процессов, в частности при анализе и прогнозировании потребительского поведения и спроса.*

Ключевые слова: *математические методы, экономико-математическая модель, поведение потребителя, спрос.*

Abstract. Mashchenko G. Functions in economic models. *The article reviews the application of mathematical methods in the study of economic processes, in particular when analyzing and predicting of consumer behavior and demand.*

Keywords: *mathematical methods, economic-mathematical model, consumer behavior, of consumer behaviour, demand.*

Володимир Чавдар

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми

Науковий керівник – Т.Д. Лукашова

ТРАНСЦЕНДЕНТНІ ЧИСЛА

Постановка проблеми. До поняття чисел тієї чи іншої природи, до їх використання в науці і практичній діяльності людство прийшло поступово у процесі свого історичного розвитку. Введення нових чисел, їх вивчення і використання відбувалось поступово. Наприклад, сучасні уявлення про комплексні числа були сформовані у XVIII-XIX століттях. Що стосується повного розуміння природи чисел, то воно взагалі було досягнуто лише в другій половині XIX століття – значно пізніше, ніж числа певної числової системи почали використовуватись на практиці. Проблеми, що стосувалися теорії трансцендентних чисел, вперше були сформульовані Л. Ейлером, який висловив гіпотезу, що існують числа, які не є коренями многочленів з раціональними коефіцієнтами. Він сформулював задачу доведення трансцендентності ірраціональних значень логарифмічної функції та увів термін «трансцендентні числа». У наш час теорія трансцендентних чисел вважається одним із найскладніших розділів математики.

Аналіз актуальних досліджень. Витоки теорії алгебраїчних і трансцендентних чисел беруть свій початок з праць Л. Ейлера. У подальшому над цією проблематикою працювали провідні математики того часу. Фундаментальні результати було отримано Ж. Ліувіллем, Ліндеманом, Ермітом та Кантором. Робота з даної теми була актуальною протягом 100-та років, підтвердженням цього факту є те що у 1900 р. на Паризькому міжнародному математичному конгресі один з найвидатніших німецьких математиків Д. Гільберт (1862-1943) вказав на 23 найважчі математичні проблеми, розв’язання яких істотно сприяло б подальшому розвитку математики. Серед цих проблем була проблема (під №7) про арифметичну природу чисел виду α^{β}, де α – алгебраїчне число, відмінне від 0 і 1, а β – алгебраїчне число, не нижче від другого степеня, тобто ірраціональне алгебраїчне число.

Повністю розв'язати сьому проблему Гільберта вдалося московському математику О. Гельфонду. Метод, створений ним, дозволив довести і багато інших теорем, а знайдене Беккером посилення, викликало значний прорив у теорії чисел.

Мета статті. У статті розглянуто основні властивості алгебраїчних і трансцендентних чисел; наведено доведення трансцендентності конкретних дійсних чисел; досліджено арифметичну природу чисел e та π.

Виклад основного матеріалу.

Якщо говорити про трансцендентні числа, потрібно починати з визначення алгебраїчних чисел. Комплексне (або дійсне) число α називається *алгебраїчним*, якщо воно є коренем деякого многочлена з раціональними (цілими) коефіцієнтами. Будь-яке неалгебраїчне число називається *трансцендентним*. Інакше кажучи, комплексне число α називається трансцендентним, якщо воно не є коренем жодного алгебраїчного рівняння степеня $n \geq 1$ з раціональними коефіцієнтами. З цього означення випливає, що дійсне трансцендентне число повинно бути ірраціональним. Обернене твердження неправильне. Наприклад, $\sqrt{7}$ –ірраціональне число, але воно, є алгебраїчним. У 1844 році французький математик Жозеф Ліувілль (1809-1882) уперше довів факт існування трансцендентних чисел.

Алгебраїчні та трансцендентні числа мають цілий ряд властивостей, зокрема, *сума, різниця, добуток і частка алгебраїчних чисел є числа алгебраїчні.*

Приклад 1. Доведемо, що число $\sqrt[3]{3-\sqrt[4]{5+2\sqrt{11}}}$ є алгебраїчним.

Справді, числа 5 і $2\sqrt{11}$алгебраїчні за означенням алгебраїчного числа. Число $\alpha=5+2\sqrt{11}$ алгебраїчне за властивістю. Число $\beta = \sqrt[4]{\alpha}$ алгебраїчне, бо є коренем многочлена ($x^3-\alpha$) з алгебраїчними коефіцієнтами. Число $\gamma=3-\beta$ алгебраїчне за властивістю. Число $\sqrt[3]{\gamma}$ алгебраїчне, бо є коренем многочлена $x^3-\gamma$ з алгебраїчними коефіцієнтами.

Зазначимо, що сума, різниця, добуток і частка трансцендентних чисел у загальному випадку може й не бути трансцендентним числом. Отже, трансцендентні числа, на відміну від алгебраїчних, поля не утворюють. У той же час, *сума, різниця, добуток і частка двох чисел, одне з яких алгебраїчне, а друге – трансцендентне, є трансцендентним числом.*

Через 20-25 років після досліджень Ліувілля німецький математик Георг Кантор (1845-1918) дав просте і оригінальне доведення існування трансцендентних чисел, яке ґрунтується зовсім на інших принципах. Він показав, що множина всіх дійсних алгебраїчних чисел є зчисленною, а множина дійсних чисел незчисленна. З цього випливає, що множина дійсних неалгебраїчних, тобто трансцендентних чисел, незчисленна.

Слід зазначити, що доведення Кантора не дає можливості побудувати будь-яке конкретне трансцендентне число. З цього погляду доведення існування трансцендентних чисел Ліувілля є ефективнішим.

Значний внесок у розвиток теорії трансцендентних чисел зробив Карл Луї Фердинанд Ліндеман де Корель, який довів наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *є різні між собою алгебраїчні числа, а*

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

є довільні алгебраїчні числа, які не дорівнюють нулю одночасно, то рівність

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} = 0 \qquad (1.9)$$

неможлива.

З теореми Ліндемана, випливають і такі твердження:

1) e^{α}- *трансцендентне для всякого алгебраїчного* $\alpha \neq 0$

2) *натуральний логарифм всякого дійсного алгебраїчного числа (крім 1) є трансцендентним числом*

3) *довільне, відмінне від 1 число, що має раціональний натуральний логарифм, – трансцендентне*

4) $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tg\,\alpha$ *є трансцендентними при дійсному алгебраїчному* $\alpha \neq 0$ $[2, 211]$.

Приклад 2. Довести трансцендентність $\sin\alpha$ у випадку дійсного алгебраїчного $\alpha \neq 0$.

Припустимо супротивне, нехай $\sin a = \beta$ – алгебраїчне число. Через те що

$$\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$$

то

$$\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \beta$$

звідки $\left(e^{ia}\right)^2 - 2i\beta e^{ia} - 1 = 0$, тобто e^{ia} є коренем квадратного рівняння

$$x^2 - 2i\beta x - 1 = 0$$

з алгебраїчними коефіцієнтами і тому за властивістю алгебраїчних чисел e^{ia} має бути алгебраїчним. Але це неможливо, бо ia – алгебраїчне число, відмінне від нуля.

Найбільш знаменитими трансцендентними числами є e i π. Числа e i є одними з найбільш вживаних констант сучасної математики. Число π дорівнює відношенню довжини кола до його діаметра та не залежить від розмірів кола. Першим відомим наближенням числа π було ціле число 3: математики Стародавнього Вавілону вважали, що довжина кола приблизно втричі довша за його діаметр. У Стародавньому Єгипті знайшли більш точніше відношення. Наприклад, у папірусі (1650 р. до н.е.) для числа π наводиться значення $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ яке у десятковому наближенні дає 3,16. Архімед обчислював наближення значення π, використовуючи значення периметрів правильних вписаних та описаних у коло многокутників (від 6-ти до 96-кутника). Тим самим він встановив, що $3\frac{10}{71} \le \pi \le 3\frac{1}{7}$. З точністю до двох знаків після коми це означає, що $\pi \approx 3{,}14$. Більш точне значення $\pi \approx 3\frac{17}{20} \approx 3{,}14166$ знайшов видатний римський астроном Клавдій Птолемей [7, 196]. У Індії та Китаї використовувались інші наближення числа π: $\pi = \sqrt{10}$ та $\pi \approx \frac{355}{133} \approx 3{,}1415927$. Голландський математик та обчислювач Людольф ван Цейлен (1540-1610) продовжуючи роботу по обчисленню нових десяткових знаків π, подвоюючи за методом Архімеда число сторін вписаних та описаних многокутників, дійшов до 32512254720-кутника і обчислив 20 точних десяткових знаків числа π. Пізніше він покращив свій попередній результат і знайшов 32 точних десяткових знаки для числа π. Це було значне досягнення і на його честь число π було названо «числом Людольфа». Лише в 1706 році в «Огляді досягнень математики» англійський математик. У. Джонс вперше використав літеру π. Останні відомі дані 13,3 трильйони знаків після коми станом на 2014 рік.

Що до ірраціональності чисел e i π. Вона була відомою порівняно давно. Для числа e відповідне доведення досить просте.

Теорема 2. *Число е – ірраціональне.*

Доведення. Припустимо, що число e – раціональне. Тоді $e = \frac{a}{b}$, звідки число $b!\,e$ – ціле, але

$$b!\,e = b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \cdots + \frac{b!}{b!} +$$
$$+ \frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} + \cdots$$

У правій частині всі доданки першого рядка – цілі числа, а так як і ліва частина є числом цілим (в силу нашого припущення), цілим повинна бути і сума доданків другого рядка, тобто величина.

$$\alpha = \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots$$

але ця сума додатна і в той же час, очевидно, менша за 1

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots = \frac{1}{b} \leq 1$$

а з цього слідує, $0 < \alpha < 1$, і α не може бути цілим числом, що і доводить ірраціональність числа e. Теорему доведено $[6, 122]$.

Доведення ірраціональності числа π значно складніше. Вперше ірраціональність числа π довів Ламберт у 1761 році. Доведення спиралося на розклад числа $\frac{\pi}{4}$ у ланцюговий дріб. Оскільки цей дріб виявився нескінченним, то число $\frac{\pi}{4}$, а отже, і π буде ірраціональним. Пізніше доведення було уточнено Лежандром. Доведення Ламберта і Лежандра можна знайти у книзі академіка С.Н. Бернштайна «Про квадратуру круга» ($[1, 73]$).

У даній статті подано доведення ірраціональності числа π, яке запропонував американський математик Нівен у 1947 році.

Теорема 3. *Число π – ірраціональне.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто, що π – раціональне. Тоді $\pi = \frac{a}{b}$, де a i b – цілі. Розглянемо многочлени

$$f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!} = \frac{b^n (a - bx)^n}{n!}$$

$$F(x) = f(x) - f^{II}(x) + f^{IV}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Оскільки x входить у чисельник многочлена $f(x)$ з показниками від n до $2n$, то $f(x)$ можна записати в такому вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} a_{i-n} x^i$$

звідки видно, що

$$f(0) = f'(0) = \cdots f^{(n-1)}(0) = 0$$

і що в похідній $f^{(k)}(x)$, $n \leq k \leq 2n$ при $x = 0$ зберігається лише доданок, утворений членом многочлена $f(x)$, який містить x^k. Тому

$$f^k(0) = \frac{k!}{n!} a_{k-n}$$

Отже, для $0 \leq j \leq 2n$, $f^j(0)$ – ціле число, оскільки, очевидно, що a_{j-n} – цілі числа. Але з першої рівності дістанемо.

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left[a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right]^n}{n!} = f(x)$$

Отже, при будь-якому j, $f^{(i)}(x) = f^{(i)}(\pi - x)$ і $f^{(j)}(\pi) = f^{(i)}(0)$ – також ціле число. Тому $F(0)$ і $F(\pi)$ – цілі числа.

Ураховуючи тепер, що з

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)) = F''(x)\sin(x) + F(x)\sin(x) = f(x)\sin(x)$$

випливає

$$I = \int_0^\pi f(x)\sin(x)\,dx = [F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)]_0^\pi = F(\pi) + F(0)$$

приходимо до висновку: I – число ціле, притому додатне, бо в інтервалі $(0, \pi)$ підінтегральна функція додатна. Але для $0 < x < \pi$ з першої рівності матимемо

$$f(x)\sin(x) < \frac{\pi^n \alpha^n}{n!}$$

Остання нерівність показує, що для досить великих n підінтегральна функція, а разом з тим і сам інтеграл можуть стати як завгодно малими. Ця суперечність і доводить ірраціональність числа π [6, 124].

У 1873 р. французькому математику Ерміту вдалося довести трансцендентність числа e. У 1882 р. Ліндеман, користуючись методом Ерміта, довів трансцендентність числа π. Цим самим було доведено неможливість розв'язання славнозвісної проблеми квадратури круга (тобто неможливість побудувати за допомогою циркуля і лінійки, квадрата, рівновеликого за площею кругу з радіусом, що дорівнює одиниці, або, що те саме, – відрізка завдовжки π). Взагалі, Ліндеман довів більш загальне твердження, з якого відразу ж випливає трансцендентність числа π.

Список використаних джерел

1. Бернштейн С.Н. О квадратуре круга. / С.Н. Бернштейн – Москва-Ленинград, 1936. – 239 с.
2. Бородін О.І. Теорія чисел / О.І.Бородін. – К.: Вища школа, 1970. – 275 с.
3. Гельфонд А.О. Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд М., 1952. – 223 с.
4. Дринфельд Г.И. Трансцендентность числа e и π / Г.И.Дринфельд – Харьков, 1952. – 79 с.
5. Лиман Ф.М. Елементи теорії груп, кілець і полів: Навчальний посібник / Ф.М. Лиман, Т.Д. Лукашова – Суми: МакДен, 2013. – 208 с.
6. Шидловский А.Б. Диофантовы приближения и трансцендентные числа / А.Б. Шидловский – М., 1982 – 264 с.
7. Энциклопедия для детей. Математика / Глав.ред. М.Д. Аксенова. – Т. 11. – М.: Аванта+, 2002. – 688 с.

Анотація. Чавдар В.М. Трансцендентні числа. *Стаття присвячена трансцендентним числам. У ній проаналізовано наукову літературу з теми дослідження, систематизовано властивості алгебраїчних та трансцендентних чисел, описані способи побудови трансцендентних чисел, доведено трансцендентність окремих дійсних (комплексних чисел). Також наводяться основні теореми за даної теми.*

У даній статті всі дані наводяться в хронологічному порядку, що наочно демонструє весь розвиток теорії трансцендентних чисел. Розглянуто знамениті класичні сталі: е, π та співвідношення, що з ними пов'язані. Також наводяться найбільш відомі досягнення науковців пов'язані з цими числами. Розглянуто найбільш відомі доведення їх ірраціональності та трансцендентності.

Стаття може бути корисною учням, що цікавляться математикою, студентам фізико-математичного факультету для підготовки до занять та вчителям математики з метою самоосвіти.

Ключові слова: *трансцендентні числа, число* е, *число* π.

Аннотация. Чавдар В.М. Трансцендентные числа. *Статья посвящена трансцендентным числам. В ней проанализирована научная литература по теме исследования, систематизированы свойства алгебраических и трансцендентных чисел, описаны способы построения трансцендентных чисел, доказано* *трансцендентность отдельных действительных (комплексных чисел). Также в статью включены основные теоремы по данной теме.*

В данной статье все данные приводятся в хронологическом порядке, наглядно демонстрируя все развитие теории трансцендентных чисел. Рассмотрены знаменитые классические постоянные: е, π и соотношения, что с ними связанные. Также приводятся наиболее известные достижения ученых связанные с этими числами. Рассмотрены наиболее известные доказательства их иррациональности и трансцендентности.

Статья может быть полезна ученикам, что интересуются математикой, студентам физико-математического факультета для подготовки к занятиям и учителям математики с целью самообразования.

Ключевые слова: *трансцендентные числа, число е, число π.*

Abstract. Chavdar V.M. Transtsendentn number. *In this article describes about transcendental numbers. We analyzed the scientific literature on the subject of research, systematically properties of algebraic and transcendental numbers, describes methods of constructing transcendental numbers proved the transcendence of individual real (complex numbers). The article also introduced the basic theorems on the subject. In this article, all data are presented in chronological order, demonstrating the entire development of the theory of transcendental numbers. Posted a few examples. Considered famous classical constants: e, π and the relations connected with them. It also provides best-known achievements of scientists associated with these numbers. Considered the most famous proof of their irrationality and transcendence.*

The article can be useful for students that are interested in mathematics, students of physics and mathematics to prepare for classes and teachers of mathematics for the purpose of self-education.

Keywords: *transcendental number, the number e, the number π*

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

Ірина Краснокутська
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
val42227@yandex.ru
Науковий керівник – Н.В. Шамшина

ПРО КОМП'ЮТЕРНІ ВІРУСІ ДЛЯ МОБІЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ ТА ЗАХИСТ ВІД НИХ

Безпека мобільних пристроїв на сьогодні, чи не одна з найактуальніших проблем всього людства. Адже всього за пару років, комп'ютерними вірусами були заражені близько мільйону мобільних пристроїв.

Комп'ютерні віруси взагалі – це вид шкідливого програмного забезпечення, здатний створювати копії самого себе і впроваджуючи цей код до інших програм, у системні області пам'яті, завантажувальні сектори, а також поширювати свої копії по різноманітних каналах зв'язку, з метою порушення роботи програмно-апаратних комплексів, видалення файлів, приведення в непридатність структур розміщення даних, блокування роботи користувачів або ж приведення в непрацездатність апаратних комплексів комп'ютера [6]. Якщо раніше комп'ютерні віруси дошкуляли користувачам персональних комп'ютерів, які були підключені до мережі, то зараз ця проблема торкнулася користувачів мобільних пристроїв, таких як планшети, смартфоні, мобільні телефони. Здебільшого ці віруси нагадують своїх прародичів, але існують и деякі відмінності. Головне при цьому «знати ворога в обличчя», та знати шляхи його розповсюдження, дотримуватися основних правил безпеки при користуванні мобільними пристроями.

Мобільні віруси – це невеликі програми, призначені для втручання в роботу мобільного телефону, смартфона, комунікатора, які записують, пошкоджують або видаляють дані і поширюються на інші пристрої через SMS та Інтернет [5].

Вперше про мобільні віруси заговорили ще в 2000 році. Вірусами назвати їх було важко, так як це був набір команд, виконуваний телефоном, який передавався через SMS. Такі повідомлення забивали відповідні комірки пам'яті і при видаленні блокували роботу телефону. Найбільшого поширення набули команди для таких телефонів, як Siemens і Nokia [1].

По справжньому, перший мобільний вірус був виявлений лише 14 червня 2004 року Першим мобільним вірусом став мережевий черв'як "Cabir", що має функції поширення по стільникових мережах і зараження мобільних телефонів під управлінням операційної системи Symbian OS. Алгоритм дії цього вірусу наступний: "Cabir" доставляється на телефон у вигляді файлу формату SIS (дистрибутив операційної системи Symbian), маскуючись під утиліту для захисту телефону Caribe Security Manager. При запуску зараженого файлу черв'як виводить на екран напис "Caribe", впроваджується в систему і активізується при кожному завантаженні телефону. Після цього "Cabir" сканує доступні пристрої, що використовують технологію передачі даних Bluetooth, вибирає перший з них і пересилає йому свою копію. Черв'як був створений спеціально для роботи в Symbian OS для мобільних телефонів Nokia [2].

За різними підрахунками, на поточний момент відомо близько 500 мобільних вірусів. Називаються й інші цифри: кілька тисяч. Різночитання в кількості і назвах мобільних вірусів визначаються різними підходами до класифікації у різних антивірусних компаній. Незважаючи на велику кількість мобільних вірусів дійсно небезпечних серед них поки що небагато, як вважають деякі фахівці [4]. Сучасна тенденція є такою, що: чим більш функціональний телефон Ви маєте, тим до більшій кількості погроз він схильний.

Основні види мобільних вірусів:

• черв'яки, що поширюються через специфічні протоколи та сервіси;

• трояни-вандали, що використовують помилки ОС для установки в систему;

• трояни, орієнтовані на нанесення фінансового збитку користувачеві.

Найбільш небезпечні хробаки або черв'яки. Черв'яки – це віруси, які розповсюджуються самі, вони здатні викликати дуже швидке зараження великої кількості систем, порушивши працездатність мобільної мережі або перетворивши її в підконтрольну зловмисникові розподілену мережу («зомбі» -мережу).

Основною метою мобільних вірусів, як і у випадку з комп'ютерними вірусами, є отримання персональної інформації, яку можна продати або використати в особистих потребах. До такої інформації можуть відноситися особисті дані власника телефону, дані самого пристрою, приватні повідомлення, іноді номери кредитних карт.

Основними функціями комп’ютерного вірусу є:

1) Знищення інформації;
2) Крадіжка особистих даних;
3) Цілеспрямована модифікація коду програми, що цікавить порушника [3].

Крадіжка персональної інформації. В даному випадку віруси збирають різні відомості, наявні в телефоні, наприклад, контакти власника телефону, паролі від програм, параметри облікових записів, таких, як Google Play або AppStore. Вся інформація, отримана вірусом, відправляється на сервер зловмисників, де використовується на їх розсуд. Один з найсерйозніших вірусів такого плану – Android.Geinimi. Потрапляючи в систему, він визначає місцеположення смартфона, завантажує файли з Інтернету, зчитує і записує закладки браузера, отримує доступ до контактів, здійснює дзвінки, відправляє, читає і редагує SMS-повідомлення.

Відправка платних SMS-повідомлень, дзвінки на «партнерський номер» без відома власника. В даному випадку за відправку повідомлення або за дзвінок списується серйозна сума коштів з особового рахунку власника телефону. Зрозуміло, гроші потрапляють до рук зловмисників. З найвідоміших подібних загроз можна назвати Android.SmsSend, а також давно відомі RedBrowser і Webster для Java-платформи. Вони маскуються під різні корисні програми, викликаючи тим самим довіру у користувача. Також існують віруси і для інших платформ, наприклад, Symbian OS, Windows Mobile та ін.

Шахрайство за допомогою використання систем інтернет-банкінгу. У даному випадку вірус відкриває доступ до мобільного додатку для роботи з банком або відповідному веб-сайту, або перехоплює SMS-повідомлення, що передаються користувачеві від систем інтернет-банкінгу. Небезпека даного типу може підстерігати власників мобільних телефонів, що працюють на різних платформах. Відомий троян Trojan-Spy.SymbOS.Zbot.a, що працює в сукупності з популярним вірусом Zbot для звичайних ПК.

На сьогодні вірус може розповсюджуватись такими способами, які зображені на рис. 1, рис. 2 [4].

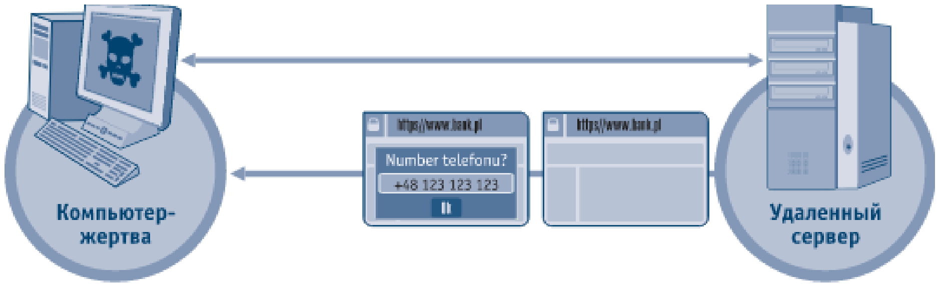


Рис. 1

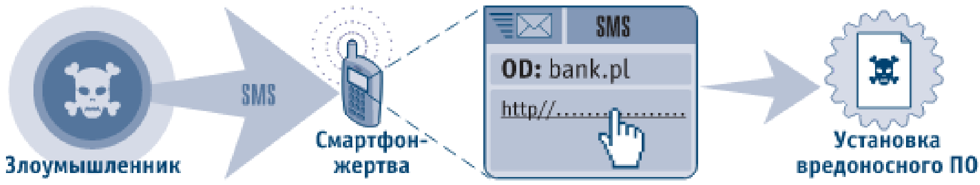


Рис. 2

Шляхи проникнення вірусу в телефон:

• з іншого телефону через Bluetooth-з'єднання;
• за допомогою MMS-повідомлення;
• з ПК (з'єднання через Bluetooth, USB, WiFi, інфрачервоне ...);
• через web- або wap-сайти.

Симптоми зараження:

1. Поява після копіювання і установки яких-небудь файлів (як правило, «ігор») всіляких «глюків» і «багів». Наприклад: безпричинно «зависає» телефон, не запускаються якісь програми, неможливо відкрити папку Прийняті файли.
2. Поява невідомих підозрілих файлів і іконок.
3. Мобільник мимовільно відправляє SMS і MMS, швидко спустошуючи рахунок власника.
4. Блокуються які-небудь функції телефону.

Деструктивні дії мобільних вірусів (одне з неписаних правил свідчить, що вірус, отримуючи управління, може робити в системі все те, що може робити користувач!):

• непомітна для користувача масове розсилання SMS та MMS;
• несанкціоновані дзвінки на платні номери;
• швидке спустошення рахунку абонента (у результаті дзвінків на платні номери і масової розсилки SMS та MMS);
• знищення даних користувача (телефонна книга, файли і т.д.);
• викрадення конфіденційної інформації (паролі, номери рахунків і т.д.);
• блокування функцій телефону (SMS, ігри, камера і т.д.) або апарат в цілому;
• швидка розрядка акумулятора;
• розсилка (від імені власника телефону) заражених файлів всіма можливими способами (e-mail, WiFi, Bluetooth і т.д.);
• при синхронізації телефону з комп'ютером - пересилання на ПК деструктивного коду;
• можливість віддаленого управління апаратом.

Антивірусні компанії давно почали випускати версії своїх програм для захисту мобільних телефонів, але спеціалізоване захисне ПЗ - мобільний антивірус, не завжди допомагає, так як віруси швидко еволюціонують. Найкращим захистом завжди була пильність користувача. Шкідливий код не може проникнути на мобільний пристрій абсолютно без відома його власника. Тому, щоб уникнути зараження слід дотримуватись таких заходів захисту:

1. Якщо у вас «просунутий» мобільник, користуйтеся антивірусами.

2. Будьте обережні при установці всіляких додатків (особливо часто мобільні віруси «молотять» під гри!). Якщо є можливість, перед копіюванням / установкою чого-небудь на мобільник, перевірте те, що ви збираєтеся копіювати / встановлювати, на стаціонарному ПК антивірусним монітором зі свіжими базами.

3. Не встановлюйте на мобільник незнайомий «контент» невідомого походження.

4. Не дозволяйте запуск незнайомих програм.

5. Не тримайте Bluetooth постійно включеним, включайте його тільки в разі необхідності (а якщо вже доводиться тримати Bluetooth постійно включеним, використовуйте режим Прихований).

6. Якщо вам пересилають по Bluetooth якийсь підозрілий файл, ви завжди можете відхилити його прийом!

7. Не завантажуйте файли з Інтернету відразу на мобільник. Закачайте їх спочатку на ПК, перевірте антивірусом, а вже потім встановлюйте в мобільник.

8. Періодично перевіряйте на наявність вірусів свій мобільний пристрій.

9. Качайте файли тільки на довірених сайтах.

10. Очищуйте кеш пристрою, як найчастіше.

Якщо вірус з’явився, треба видалити заражені файли. Як правило, безпосередньо з мобільника (звичайного, не «смарта») видалити заражені файли не вдається. Для видалення заражених файлів потрібно підключити мобільник до ПК і скористатися яким-небудь файловим менеджером, наприклад, для телефонів Nokia – файловим менеджером, що входять до складу Nokia PC Suite. Після видалення заражених файлів перезавантажте мобільник (вимкніть і знову ввімкніть). Якщо видалення заражених файлів не допомагає, доведеться «перепрошити» телефон, звернувшись до сервісного центру.

Список використаних джерел

1. Компьютерные вирусы [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://avdesk.kiev.ua/virus/83-virus.html
2. Мобильные вирусы [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.corporacia.ru/pages/page/show/239.htm
3. Мобильные вирусы: очередной миф или реальная угроза? [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://netler.ru/pc/mobi-vir.htm
4. BYTE/ Россия Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.bytemag.ru
5. Дрозд О.В. Інформаційна безпека мобільних пристроїв: актуальність, перспективи / О.В. Дрозд // Корпоративні центри мобільної безпеки. – 2013. – №3. – С. 28.
6. Леонтєв В.П. Новітня енциклопедія персонального комп'ютера / В.П. Леонтєв – М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2003.

Анотація. Краснокутська І. Про комп’ютерні віруси для мобільних пристроїв та захист від них. *Розглянуто поняття «вірусу», його основні види. Зазначено складові мобільного вірусу та способи зараження ним. Виділені основні правила захисту.*

Ключові слова: *вірус, захист, черв’як, троянський кінь.*

Аннотация. Краснокутская И. Про компьютерные вирусы для мобильных устройств и защиту от них. *Рассмотрено понятие «вируса», его основные виды. Отмечены составляющие мобильного вируса и способы заражения им. Выделены основные правила защиты.*

Ключевые слова: *вирус, защита, червь, троянский конь.*

Abstract. Krasnokutskaya I. About computer viruses for mobile devices and protection against them. *The concept of "virus" and its main types are presented. Noted components mobile virus and their methods of infection. The basic rules of protection are listed.*

Keywords: *virus protection, worm, Trojan.*

Інна Левченко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
Innet1204@yandex.ua
Науковий керівник – С.І. Петренко

ВИХОВНИЙ АСПЕКТ СЕРЕДОВИЩА ПРОГРАМУВАННЯ «SCRATCH»

З розвитком інформаційних технологій все більшої і більшої ролі набуває використання сучасних технічних засобів навчання в школі. Важливе місце в системі технічних засобів навчання займають навчально-розважальні комп’ютерні програми, що розвивають уміння і навики алгоритмізації та програмування.

Одна з таких програм, що набула в освітньому процесі досить широкої популярності є середовище програмування Scratch, яке на сьогодні посідає 24 місце серед всіх найбільш популярних мов програмування, серед яких C, Java, C ++, C #, PHP, Pascal [2].

Scratch – це візуальне об'єктно-орієнтоване середовище програмування для навчання школярів молодших і середніх класів. Його призначено для створення комп’ютерних анімацій, мультимедійних презентацій, анімаційних та інтерактивних історій, ігор, моделей і інших видів роботи [1, с. 6].

Мова Scratch була розроблена у 2007 році в лабораторії Lifelong Kindergarten під керівництвом професора Мітчела Рєзніка з метою спрощення процесу вивчення програмування та створення зрозумілого інструменту, який би дозволив дітям, у яких немає досвіду програмування, вивчити основні принципи об'єктно-орієнтованого і багатопотокового програмування [3].

Спочатку Scratch створювали для учнів віком від 8 до 16 років, але як свідчить практика навіть діти молодшого шкільного віку можуть працювати в цьому середовищі.

На сьогодні сучасна наука втратила свою цілісність. Шкільна освіта – це не що інше як вивчення окремих фрагментів мозаїки, з яких складена картина світу. Враховуючи соціальні дослідження, за якими кожні п’ять років кількість інформації збільшується вдвічі, сучасна школа повинна визначити одними з пріоритетних завдань розвиток частинно-пошукових здібностей школяра та його креативного мислення.

Один з розробників середовища програмування Scratch, Алан Кей вважає, що необхідно як можна раніше дати учневі потужний «інструмент для думання», який би сприяв пізнанню нового і створенню зв'язків між відомим, розвивав не тільки аналітичне, але й синтетичне мислення [1, с.7].

Scratch – інтерактивне середовище, побудоване на інтуїтивно зрозумілих дитині принципах. Принципово новою є ідея складання програми мишкою уже з готових блоків. Подібний спосіб складання програм унеможливлює проблему синтаксису, що для молодших школярів істотно. Крім того, важливим є те, що робота в середовищі Scratch не вимагає знання мови програмування. Для створення своїх проектів учень може використовувати одну з п'ятдесяти мов, вбудованих в Scratch, в тому числі і українську.

Проаналізувавши сучасні програми та підручники з курсу інформатики, хочемо відмітити, що вперше учні зустрічаються з середовищем програмування ще в початковій школі при вивченні курсу «Сходинки до інформатики». З поглибленням лінії алгоритмізації при вивченні курсу інформатики розширюються знання та удосконалюються уміння учнів роботи зі Scratch.

При роботі з учнями вчитель може використовувати як групову та індивідуальну форми роботи. З метою виховання пояснювально-ілюстративні, частково-пошукові та дослідницькі, проектні методи навчання.

Молодший шкільний та молодший підлітковий вік школяра припадають на сенситивний період, коли він може самостійно свідомо здійснювати частково-пошукову діяльність.

Основою вивчення мови програмування Scratch є проектна науково-пізнавальна діяльність школярів. Саме цей вид діяльності дає можливість найбільш повно розкривається потенціал та приховані здібності учнів. Учні вчяться створювати інтерактивні історії, квести, інтерактивні ігри, навчальні програми, мультфільми, моделі та інтерактивні презентації. Використання методу проектів у середовищі програмування Scratch дає можливість розвивати такі цінні якості і вміння, що необхідні для сучасної людини, як: критичне, алгоритмічне, і творче мислення, уміння знаходити методи вирішення проблем, уміння працювати в колективі та самостійно. Робота в середовищі програмування Scratch сприяє виховуванню почуття відповідальності за результат своєї праці, культуру і навички взаємодії в глобальній мережі, формуванню установки на позитивну соціальну діяльність в інформаційній спільноті, з метою запобігання порушення правових, етичних норм роботи з інформацією [1, с. 61].

Особливе місце в системі виховання при роботі з Scratch займає естетичне виховання. При написанні власних проектів учні розробляють сценарій, працюють над створенням спрайтів, об'єктів їх костюмів та аудіосупроводу. Розвивається естетичне, художнє сприйняття та смак.

Педагогічна доцільність вивчення середовища програмування Scratch полягає в тому, що у учнів формується не тільки емоційно-моральні якості та творчі здібності, але й навички роботи з мультимедіа; створюються умови для активного, пошукового навчання, надаються широкі можливості для різноманітного моделювання.

Список використаних джерел

1. Рыдак В.Г., Дженжер В.О., Денисова Л.В. Проектная деятельность школьника в среде програмирования Skratch: учебно-методическое пособие / Рыдак В.Г., Дженжер В.О., Денисова Л. В. – Оренбург: Оренб. Гос. ин-т, менеджмента, 2009 – 116с. : ил.
2. TIOBE Software:The Coding Standards Company. – 2009. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.tiobe.com/index.php/content/paperinfo/tpci/
3. Scratch [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://scratch.mit.edu/

Анотація. Левченко І. Виховний аспект середовища програмування «Scratch». *Проаналізовано проблему виховання школярів при вивченні середовища* *програмування «Scratch». Розглянуто поняття середовища програмування «Scratch» та мета його створення. Представлено форми та методи виховання особистісних та моральних якостей учнів.*

Ключові слова: *середовище програмування «Scratch», виховання, метод проектів.*

Аннотация. Левченко И. Воспитательный аспект среды программирования «Scratch». *Проанализирована проблема воспитания школьников при изучении среды программирования «Scratch». Рассмотрены понятие среды программирования «Scratch» и цель его создания. Представлены формы и методы воспитания личностных и моральных качеств учащихся.*

Ключевые слова: *среда программирования «Scratch», воспитания, метод проектов.*

Abstract. Levchenko I. Educational aspect of the programming environment «Scratch». *The problem of education of students in the study program environment «Scratch». The notion programming environment «Scratch» and the purpose of its creation. Submitted forms and methods of education and personal moral character of students.*

Keywords: *programming environment «Scratch», training, project method.*

Алфавітний покажчик

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Збірник наукових праць

ВИПУСК 1 (8)

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск
О.В. Семеніхіна

Комп'ютерна верстка
О.М. Удовиченко

Фізико-математичний факультет
СумДПУ імені А.С. Макаренка
вул. Роменська, 87
м. Суми, 40002
тел. (0542) 68 59 10
http://fizmatsspu.sumy.ua