МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

НАУКОВІ ДОПОВІДІ

викладачів фізико-математичного факультету

ВИПУСК 2

Суми – 2017

Друкується згідно з рішенням вченої ради фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка

С45 Наукові доповіді викладачів фізико-математичного факультету. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2017. – Випуск 2.– 64 с.

До збірника увійшли результати наукових досліджень викладачів фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, які доповідалися на семінарах кафедр математики, інформатики, фізики та методики навчання фізики протягом 2016-2017 навчального року.

ЗМІСТ

Дегтярьова Н.В. 4
СТВОРЕННЯ КОЛЕКЦІЇ НАВЧАЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ СТУДЕНТАМИ В КОНТЕКСТІ ФОРМУВАННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНЬОГО УЧИТЕЛЯ ІНФОРМАТИКИ 4

Завражна О.М., Салтикова А.І. 7
ЕЛЕМЕНТИ НАНОТЕХНОЛОГІЙ В КУРСІ «КВАНТОВА МЕХАНІКА» 7

Мартиненко О.В. 11
ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ НУЛІВ ФУНКЦІЙ 11

Мороз И.А. 13
НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ 13

Одінцова О.О. 17
ТЕОРІЯ ІГОР І ПОЛІТИКА 17

Петренко С.В., Петренко Л.В. 24
ПРО РЕЗУЛЬТАТИ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ФОРМУВАННЯ ІКТ-КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ 24

Погребний В.Д. 28
ЩЕ ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ТОПОЛОГІЧНЕ ВКЛАДЕННЯ 28

Страх О.П. 31
ПОБУДОВА ФРАКТАЛЬНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ЛІНІЙ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ВХІДНИХ ДАНИХ 31

Чкана Я.О. 44
ПРО ОДИН ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ 44

Шамоня В.Г., Удовиченко О.М., Юрченко А.О. 48
ПРО КОМП'ЮТЕРНУ ГРАФІКУ ЯК ІНСТРУМЕНТ НАВЧАННЯ І ПРОФЕСІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ 48

Шамшина Н.В. 52
ВИКОРИСТАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ДІАГРАМ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ДАНИХ В EXCEL 52

Шишенко І.В. 56
ШЛЯХИ ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ СТАРШОКЛАСНИКІВ КЛАСІВ ГУМАНІТАРНОГО ПРОФІЛЮ НАВЧАННЯ 56

Хворостіна Ю.В., Юрченко А.О. 59
ЗАСТОСУВАННЯ РОЗКЛАДІВ ЛЮРОТА ДО МОДЕЛЮВАННЯ І РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ, ТЕОРІЇ МІРИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ФРАКТАЛЬНОГО ТА ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ 59

Дегтярьова Неля
старший викладач кафедри інформатики
degtyarevanv@fizmatsspu.sumy.ua

СТВОРЕННЯ КОЛЕКЦІЇ НАВЧАЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ СТУДЕНТАМИ В КОНТЕКСТІ ФОРМУВАННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНЬОГО УЧИТЕЛЯ ІНФОРМАТИКИ

Професійна компетентність вчителя складається з фундаментальних знань предмету, педагогічної підготовки, методичних знань та досвіду [1;3;4;6;7]. Формування окремих компонентів професійних компетентностей учителя інформатики відбувається єдності навчання й виховання, теоретичної та практичної підготовки, підготовки до реальних ситуацій, що виникають на уроках [5, с.14]. У великому різноманітті навчальних матеріалів, що пропонуються з метою обміну ними і розташовуються на різних форумах, у наукових, методичних скарбничках, публікаціях учитель має уміти обирати та формувати логічно завершену методичну розробку. При цьому важливо розуміти доцільність застосування тих чи інших матеріалів на конкретному уроці. Необхідно привчати студентів не просто копіювати готові роботи, а створювати на основі розглянутих власні або урізноманітнювати їх іншими матеріалами, уміти комбінувати відповідно меті уроку. Досвід вчителів є надзвичайно важливим, як і розробки, що вже апробовані при викладанні шкільної дисципліни. Студентам варто навчитися вибудовувати власну методику, власний урок, наповнюючи його існуючими, вдосконаленими матеріалами.

Свідоме, виважене та доцільне використання методичних матеріалів є одним з компонентів професійної компетентності учителя. Дана теза підтверджується тими науковими дослідженнями таких науковців, як Л. С. Ващенко, М. Р. С. Гуревич, І. Жалдак, І. О. Зязюн, О. І. Локшина, Н. Г. Ничкало, О. І. Пометун, А. В. О. Я. Савченко, С. О. Сисоєва, Хуторський, К. В. Шапошников та інші.

При вивченні дисципліни «Шкільний курс інформатики», «Методика навчання інформатики» та при проходженні лабораторного практикуму зі спеціальності студентам пропонується створення дидактичних матеріалів для майбутньої професійної діяльності. Проте перші дві дисципліни дають змогу лише оглядово підійти до створення вказаної колекції, оскільки велика кількість тем та невелика кількість годин обмежують таку можливість. На лабораторному практикумі зі спеціальності пропонуємо 8 академічних годин для такої роботи, тому студенти мають змогу опрацювати достатню кількість методичних матеріалів. При виконанні завдання дозволяється використовувати різні пошукові системи, програмні засоби для оформлення роботи. Результати для перевірки можна подавати у електронному вигляді [2, с. 15]. Завдання передбачає створення колекції текстів, таблиць, зображень та списків. Студенти мають змогу створити власний варіант, а потім обмінятися при бажанні розробками. При цьому за відгуками студентів 4 курсу, а пізніше магістрантів, що проходили педагогічну виробничу практику у загальноосвітніх навчальних закладах, їм знадобилися їх власні напрацювання. А також вчителі інформатики виявили зацікавленість до такої колекції матеріалів.

Як було зазначено вище, завдання розбивалися на частини. Наведемо текст завдання з методичних рекомендацій, розроблених до вказаного курсу [2, с.14-15].

Робота зі списками. Створити або знайти 10 багаторівневих списків за різною тематикою. У списках повинно бути не менше 3-х рівнів та не менше 8 елементів. Оформити у текстовому документі з назвами тематики списку. Спочатку вказати тему. Нижче розташувати список, пропустити порожній рядок, вказати наступну тему. Розташувати наступний список і т.д.

Робота з таблицями. Створити або знайти 10 таблиць різної тематики. Таблиці повинні призначатися для обчислення у табличному процесорі. Таблиці повинні бути різного формату, а саме: містити не менше 7 рядків, у деяких повинно бути застосоване об'єднання комірок, для обчислення значень у кожній з таблиць повинні використовуватися різні функції. Функції повинні розподілятися таким чином: 3 логічних функцій, 2 математичних, 2 дата-час, 3 складних функції (не зараховується виконання простих функцій на одну операцію множення, додавання, віднімання чи ділення, знаходження відсотків тощо)

Робота з текстом. Знайти 10 абзаців тексту на різну тематику. У абзаці повинно бути не менше, ніж 12 рядків. В кожному абзаці повинен бути особливий елемент (вставка зображення, символів, формула, таблиця, діаграма SmartArt тощо). Таких елементів повинно бути декілька у абзаці (5 формул, 3 зображення, 12 символів тощо). Кожний абзац повинен містити заголовок. Кожен з елементів повинен бути відформатований особливим чином: недостатньо вставити зображення, необхідно застосувати ефект тіні, форма рисунка, розмір та колір межі тощо.

Робота з зображеннями. Знайти 10 зображень на одну *вузьку* тематику, наприклад, архітектура міста Суми, сумчасті тварини Австралії, найцікавіші мости, Карпатські полонини тощо. Малюнки чи фотографії повинні зображати різні об'єкти, а не різні ракурси одного. Перед кожним з зображень вставити назву та сайт, де міститься зображення. Скопіювати або ввести свою думку про особливість зображеного об'єкт та декілька (від одного до п'яти) речень.

Роботи необхідно було розташувати під відповідною назвою у окремій папці «Методичні матеріали».

Така робота могла бути виконана дистанційно і результати пропонувалось надіслати електронною поштою викладачу. Кожна окремо виконана робота оцінювалася 6 балами. При цьому максимальну кількість балів студенти можуть отримати при очному захисті роботи. Якщо студент надсилає роботу та не з'являється на захист, то кількість балів зменшується на 1. Наведемо приклад розподілу балів.

Таблиця 1. Розподіл балів за створення колекції списків

Вид роботи	Кількість балів
За кожний створений список по 0,1 бала	1
Списки містять не менше 3-х рівнів (по 0,1 б)	1
Не менше 2-х списків розроблено самостійно	1
Тематика списків цікава та зрозуміла учням (по 0,1 бала за список)	1
За оформлення відповідно вимог (по 0,1 бала за список)	1
Очний захист роботи	1
Всього:	**6 балів**

Аналогічний розподіл балів пропонувався для кожної подальшої роботи. Наведемо ще один приклад оцінювання роботи з зображеннями

Таблиця 2. Розподіл балів за створення колекції зображень

Вид роботи	Кількість балів
За 10 створених зображень (по 0,1 б. за зображення)	1
Тематика та оформлення зображень відповідно завдання (по 0,1 б. за зображення)	1
Вказано посилання на сайт, де зображення було знайдено (по 0,1 б. за правильне, активне посилання)	1
Висловлення власної думки (див. завдання)	1
За оформлення роботи в цілому	1
Очний захист роботи	1
Всього:	**6 балів**

До всього курсу лабораторного практикуму були розроблені методичні вказівки, де зазначені правила форматування текстових документів та рекомендації до оформлення табличних даних. Вказівки містять як вимоги, що наводяться у шкільних підручниках з інформатики, так і більш розширені рекомендації до оформлення об'єктів. Вони стосуються розміру кегля шрифту у текстовому документі та у таблицях, виставлення відступу у першому рядку, прийнятих у діловодстві шрифти та стилі, розміру зображень, особливості нумерації сторінок, розбиття на рядки у таблиці, заголовків таблиць та стовпчиків, розташування числових та текстових даних у таблиці тощо.

Таким чином досягається не тільки відпрацювання навичок та отримання досвіду практичної роботи самих студентів, але й відбувається накопичення методичного матеріалу для майбутньої професійної діяльності.

Список використаних джерел

1. Ваколя Т. І. До проблеми професійної компетентності вчителя початкової школи / Т. І. Ваколя // Науковий вісник Ужгородського національного університету. - Серія «Педагогіка, соціальна робота». Випуск 34. – С. 48-51

2. Дегтярьова Н. В. Спецлабпрактикум з інформатики. Методичні рекомендації / Н.В. Дегтярьова, С.І. Петренко. – Суми : ФОП ЦьомаС.П., 2017. – 28 с.

3. Жалдак М. І. Модель системи соціально-професійних компетентностей вчителя інформатики / М.І. Жалдак, Ю.С. Рамський, М.В. Рафальська // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 2: комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова., 2009. – №7(14) – С. 3-10.

4. Лутаєнко О. М. Формування професійної компетентності майбутніх учителів в умовах сучасної освіти: теоретичні аспекти / О. М.Лутаєнко // Формування професійної компетентності майбутніх учителів в умовах сучасної освіти: теоретичні аспекти Дослідження молодих учених у контексті розвитку сучасної науки : матер. Всеукр. наук.-практ. конф. (20 квітня 2011 р.). - С. 93-95

5. Федорук Г. М. Формування інформаційно-комунікаційної компетентності майбутніх учителів технологій у процесі професійної підготовки: автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.04 / Г.М. Федорук. – Вінниця. – 2015. – 23 с.

6. Шмиголь І. Сутність та структура професійної компетентності педагога / І. Шмигаль // Проблеми підготовки сучасного вчителя № 4 (Ч. 1), 2011. – С. 197-204

7. Шовкун В. В. Формування професійної компетентності майбутніх учителів інформатики у квазіпрофесійній діяльності: дис. … канд. пед. наук 13.00.02 / В.В. Шовкун. – Херсон, 2016. – 247 с.

Анотація. **Дегтярьова Н. В. Створення колекції навчальних матеріалів студентами в контексті формування професійної компетентності майбутнього учителя інформатики**. У статті описано досвід навчання створенню колекції методичних матеріалів студентів спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика). Методичні матеріали необхідні для використання на уроках інформатики при первинному закріплені, при проведенні репродуктивної роботи з метою накопичення досвіду учнями правильного оформлення окремих типів об'єктів. Майбутній учитель інформатики має уміти свідомо підходити до використання методичних розробок, що пропонуються іншими вчителями, методистами та науковцями. Важливим є уміння учителя створювати власні розробки при великій кількості готових матеріалів у

глобальній мережі. Накопичення власної колекції методичних матеріалів є досить корисним для молодого вчителя, що розпочинає професійну діяльність.
Ключові слова: методика навчання інформатики, професійна компетентність вчителя, колекція методичних матеріалів, лабораторний практикум, розподіл балів.

Abstract. Dehtiarova N. Create a collection of educational materials by students in the context of professional competence of the future teacher of computer science. The article describes the learning experience of creating a collection of teaching materials students majoring 014.09 Education (Computer Science). Teaching materials needed for use in science lessons in primary secured during the reproductive work to gain experience students the proper execution of certain types of objects. Future teacher of Informatics must consciously to use teaching materials offered by other teachers, trainers and researchers. The ability of the teacher is important to create their own design for a large number of ready-made materials in the global network. Accumulations own collection of teaching materials is very useful for the young teacher who begins the professional activity.
Keywords: methods of teaching science, teacher professional competence, a collection of teaching materials, laboratory practice, the distribution points.

Завражна Олена
доцент кафедри фізики та
методики навчання фізики
zavragna@gmail.com,
Салтикова Алла
доцент кафедри фізики та
методики навчання фізики
0809saltykova@gmail.com

ЕЛЕМЕНТИ НАНОТЕХНОЛОГІЙ В КУРСІ «КВАНТОВА МЕХАНІКА»

Нормативна навчальна дисципліна «Квантова механіка» вивчається на спеціальності 6.040203 Фізика на 4 курсі. На вивчення цієї дисципліни відводиться: лекційних - 60 годин, практичних – 34 години, на самостійну роботу – 114 годин.

Програма навчальної дисципліни «Квантова механіка» складається з наступних розділів:

Розділ 1. Вступ. Експериментальні основи квантової механіки.

Розділ 2. Математичний апарат квантової механіки.

Розділ 3. Найпростіші задачі квантової механіки.

Розділ 4. Рух частинки в центрально-симетричному полі. Елементи теорії збурень.

Розділ 5. Елементи релятивістської квантової механіки.

Розділ 6. Основи теорії багатьох частинок.

Саме при вивченні найпростіших задач квантової механіки (розділ 3) було б доцільно розглянути одне з фундаментальних явищ в наноструктурах: *квантове обмеження.* Цей з ефект є чисто квантово-механічним явищем.

Квантове обмеження спостерігається у випадку, коли потенціальні бар'єри обмежують вільний рух електронів в одному з напрямків. Воно змінює розподіл дозволених енергетичних станів і впливає на переміщення носіїв заряду в наноструктурі. Транспорт носіїв заряду може, в принципі, здійснюватися як паралельно, так і перпендикулярно потенційним бар'єрам.

У разі руху носіїв уздовж потенційних бар'єрів домінуючими ефектами виявляються балістичний транспорт і квантова інтерференція. Проходження ж носіїв заряду через потенційні бар'єри відбувається виключно завдяки їх тунелюванню, що і забезпечує переміщення носіїв заряду з однієї області наноелектронних приладів в іншу.

Вивчати фізичну природу і основні закономірності прояву вище описаних явищ можна при розв'язанні задачі про частинку у прямокутній потенціальній ямі.

Можна показати, что в наноструктурі вільний рух електрона обмежений в одному напрямку, а саме в напрямку (або напрямках), в якому геометричний розмір даної структури порівняний з довжиною хвилі, що відповідає цьому електрону, тобто з довжиною хвилі де Бройля, де швидкість руху електрону може бути прийнята рівною швидкості, яка відповідає енергії електрона на рівні Фермі.

У напрямку, який обмежує вільний рух електрона в низьковимірних структурах, потенціальну енергію електрона можна представити у вигляді нескінченно глибокої прямокутної потенціальної ями - квантового ящика з нескінченно високими стінками (рис. 1).

Нескінченно високий потенціальний бар'єр забороняє перебування електрона за межами області $0 < x < a$. Таким чином, хвильова функція електрона обертається в нуль на границях потенціальної ями ($x = 0$, $x = a$). Такій умові відповідає лише обмежений набір хвильових функцій.

Далі можна показати, що енергії дозволених енергетичних станів електрона в ямі виявляються дискретними.

Отже, якщо електрон, помістити в обмежену область простору,то він може займати лише дискретні енергетичні рівні.

Зазначимо, що в класичній системи енергія частинки, що знаходиться на дні потенціальної ями, дорівнює нулю, а для квантово-механічної системи мінімальна енергія частинки відмінна від нуля.

Крім того, дозволені значення енергії для електрона виявляються квантованими і пропорційними n^2.

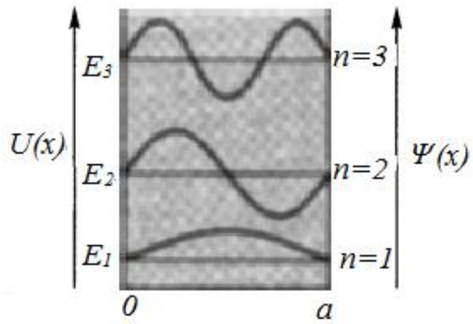


Рис. 1. Потенціальна яма та хвильові функції електронів

Можна також показати, що й принцип невизначеності також приводить до висновку про ненульове значення мінімальної енергії електрона в потенціальній ямі.

Перешкоджання руху заряджених частинок в наноструктурі, що приводить до ненульового мінімального значення їх енергії і до дискретності енергій дозволених рівнів, називають квантовим обмеженням (qiantum confinement).

У твердих тілах квантове обмеження може бути реалізовано в трьох просторових напрямах. Далі можна показати, що число напрямків, в яких ефект квантового обмеження відсутній, використовується в якості критерію для класифікації елементарних *нанорозмірних структур* за трьома групами: *квантові плівки, квантові шнури* і *квантові точки*. Схематично групи показані на рис. 2.

Квантові плівки (quantum films) представляють собою двовимірні (2D) структури, в яких квантове обмеження діє тільки в одному напрямку - перпендикулярно плівці (напрямок z на рис. 2). Носії заряду в таких структурах можуть вільно рухатися в площині xy.

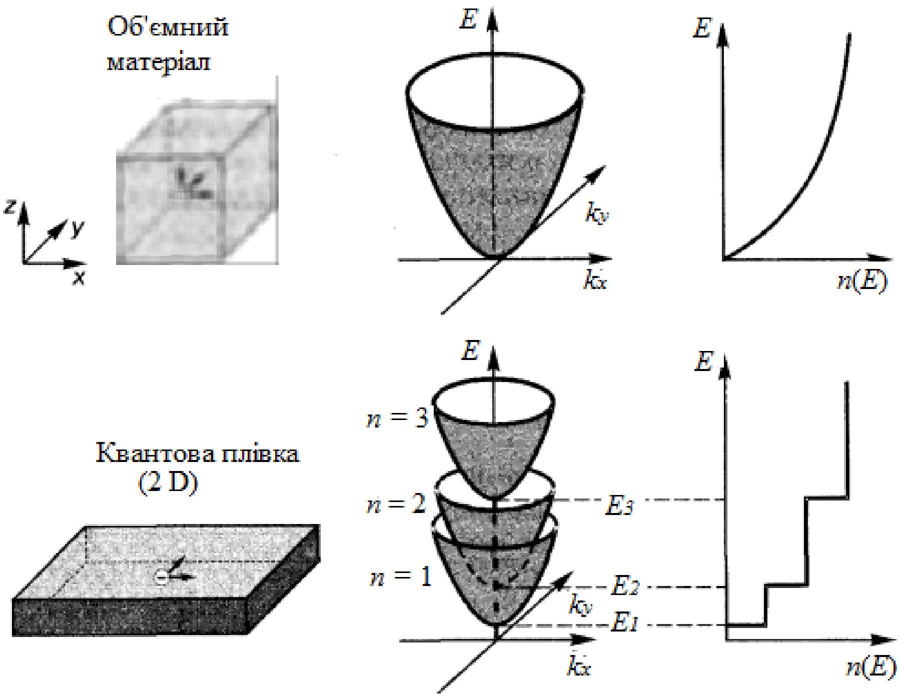
Електрони в квантових плівках зазвичай називають двовимірним електронним газом (two-dimensional electron gas, 2DEG).

Квантові шнуры (quantum wires)- це одновимірні (1D) структури. На відміну від квантових плівок, вони мають не один, а два нанометрових розміра, в напрямку яких і діє ефект квантового обмеження. Носії заряду можуть вільно рухатися тільки в одному напрямку - вздовж осі шнура.

Квантові точки (quantum dots) – це нуль вимірні (OD) структури, в яких рух носіїв заряду обмежений у всіх трьох напрямках.

Квантові точки складаються з порівняно невеликого числа атомів. В цьому відношенні до них близькі атомні кластери і нанокристаліти (кристаліти нанометрових розмірів), де також має місце ефект квантового обмеження. Наочним прикладом прояву квантового обмеження в нанорозмірних структурах є фотолюмінісценція квантових точок з напівпровідникових матеріалів.

У міру збільшення розміру квантових точок зменшується ширина дозволених оптичних переходів, тому пік люмінесценції зміщується з короткохвильової фіолетової в довгохвильову червону область спектра. Розглянуті елементарні наноструктури в певному сенсі є ідеалізованими об'єктами.



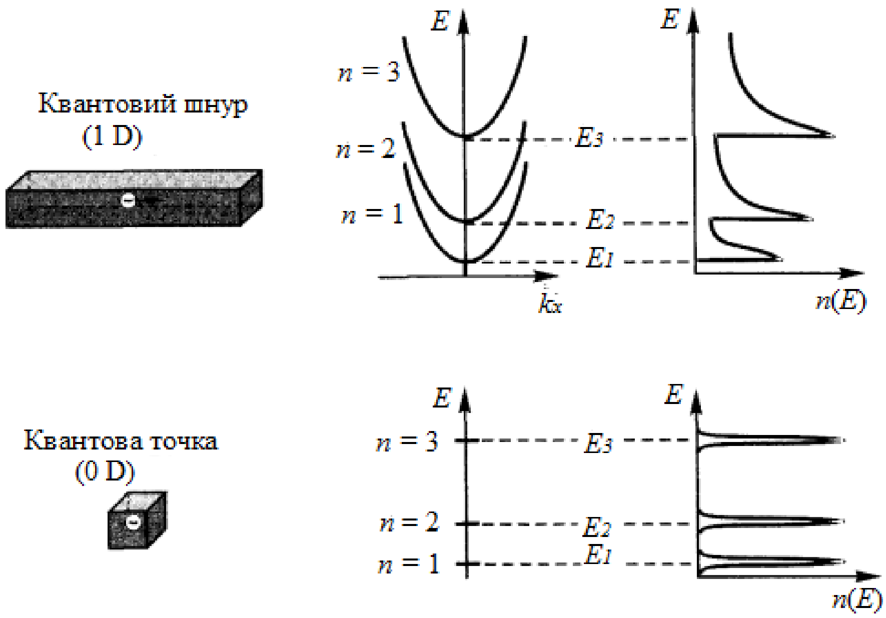


Рис. 2. Елементарні наноструктури, їх енергетичні діаграми і густина станів n(E) в порівнянні з тривимірною структурою

Очевидно, що наноструктури, які мають практичний інтерес, повинні розташовуватися на будь-якій підкладці і мати контакт з іншими структурами та функціональними елементами. Більш того, приладові застосування вимагають комбінації декількох елементарних структур. Але, незважаючи на появу в складних комбінованих структурах нових квантово-механічних ефектів, визначальну роль в них продовжує грати квантове обмеження.

Список використаних джерел

1. Неволин, В.К. Квантовая физика и нанотехнологии / В.К. Неволин. - М.: Техносфера, 2013. - 128 с.
2. Квантова механіка : підручник / І. О. Вакарчук. — 4-те вид., доп. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2012. — 872 с.

Анотація. Завражна О., Салтикова А. Елементи нанотехнологій в курсі «Квантова механіка». *В статті розглядаються питання впровадження елементів нанотехнологій при вивченні найпростіших задач квантової механіки. Показано, що вивчати фізичну природу і основні закономірності прояву явищ на нанорівні можна при розв'язанні задачі про частинку у прямокутній потенціальній ямі. Також описана класифікація нанорозмірних структур виходячи з квантово-механічних уявлень.*

Ключові слова: *нанотехнології, квантова механіка, впровадження, наноструктури.*

Abstract. Zavrazhna O., Saltykova A. Elements of nanotechnology in the course "Quantum mechanics." *The article deals with the introduction of elements of nanotechnology in the study of the simplest problems of quantum mechanics. It is shown that studying the physical nature and the basic laws of manifestation of phenomena at the nanoscale can in solving the problem of a particle in a rectangular potential hole. Also described classification nanoscale structures based on quantum mechanical concepts.*

Keywords: *nanotechnology, quantum mechanics, implementation, nanostructures.*

Мартиненко О.
кандидат фізико – математичних наук, доцент
elenamartova120@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ НУЛІВ ФУНКЦІЙ

У багатьох застосуваннях однією з важливих задач є задача про (кількість) число нулів деякої функції, які містяться в певній області. Дати відповідь на це питання дозволяє наступна теорема.

Теорема Руше [1]

Нехай $f(z)$ і $\varphi(z)$ - функції, що є аналітичними на замиканні $\overline{D}$ однозв'язної області D, обмеженої контуром L і в усіх точках цього контура задовольняють умову $|f(z)| > |\varphi(z)|, z \in C$. Тоді число нулів функції $f(z)$ і $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ в області D є однаковим.

Приклад №1. Знайти число нулів многочлена $P_n(z) = z^3 - 2z - 5$

в області D: 1) $|z| < 1$; 2) $1 < |z| < 3$

Позначимо $f(z) = 5,\ \varphi(z) = z^3 - 2z$. На межі області при $|z| = 1$ маємо:

$$|f(z)| = 5,\ |\varphi(z)| = |z^3 - 2z| < |z|^3 + 2|z|,\ |\varphi(z)|\Big|_{|z|=1} < 3, |f(z)| > |\varphi(z)|\ .$$

Умови теореми Руше виконуються, отже $P_n(z)$ має таке число нулів в області $|z| < 1$, що й $f(z) = 5$. Але $f(z) = 5$ не має коренів, тому $P_n(z) = z^3 - 2z - 5$ також не має нулів в області $|z| < 1$.

Очевидно, що всі нулі многочлена лежать зовні $|z| \le 1$, а тому досить знайти кількість нулів для $|z| < 3$.

Позначимо $f(z) = z^3,\ \varphi(z) = -2z - 5$. На межі області при $|z| = 3$ маємо:

$|f(z)|\Big|_{|z|=3} = 27,\ |\varphi(z)| < 2|z| + 5,\ |\varphi(z)|\Big|_{|z|=3} < 11,$ отже кількість нулів співпадає з кількістю нулів $f(z) = z^3$. Цей многочлен має корінь $z = 0$ кратності n = 3, тому многочлен $P_n(z)$ має три нулі в кільці $1 < |z| < 3$.

Розглянемо основну теорему алгебри і наведемо її доведення методами комплексного аналізу.

Теорема [1]

Многочлен степеня n з комплексними коефіцієнтами має рівно n коренів.

Доведення. Подамо многочлен $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ у вигляді суми двох аналітичних функцій $f(z) = a_n z^n$ і $\varphi(z) = a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{z-2} + \ldots + a_0$, тобто $P_n(z) = f(z) + \varphi(z).$ Границя відношення цих функцій $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\varphi(z)}{f(z)} = 0$, а отже знайдеться таке дійсне число $R > 0$, що для $\forall z$, які задовольняють умову $|z| > R$ виконується нерівність $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Якщо взяти R досить великим, то ми можемо отримати, що всі нулі многочлена лежать у крузі $|z| < R$. Умова $|f(z)| > |\varphi(z)|$ виконується і на межі круга, тобто при $|z| = R$, тому за теоремою Руше многочлен $P_n(z)$ у крузі $|z| < R$ (а отже й скрізь) має таке число нулів, що й функція $f(z)$. Але $f(z) = a_n z^n$ має n нулів у крузі $|z| < R$: $z = 0$ є нулем кратності n.

Приклад №2. Знайти число коренів рівняння $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$

1) у крузі $|z| < 1$

2) у кільці $4 < |z| < 6$

Дана задача зводиться до визначення числа нулів многочлена $P_n(z) = z^8 + 5z^7 - z^4 + 2$ у заданій області.

$P_n(z) = z^8 + 5z^7 - z^4 + 2$. Нехай $f(z) = 5z^7$, $\varphi(z) = z^8 - z^4 + 2$. На межі області, тобто за умови $|z| = 1$, маємо $|f(z)| = 5|z|^7$; $|f(z)|\big|_{|z|=1} = 5$, $|\varphi(z)| =$

$$= \left|z^8 - z^4 + 2\right| < |z|^8 + |z|^4 + 2,\ |\varphi(z)|\big|_{|z|=1} < 4$$

Умови теореми Руше виконані, а отже число нулів многочлена $P_n(z)$ (а відтак і коренів заданого рівняння) в області $|z| < 1$ співпадає з числом нулів $f(z) = 5z^7$ у цій області. Очевидно, що многочлен $f(z) = 5z^7$ має нуль $z = 0$ кратності 7, тому дане рівняння буде мати 7 коренів в області $|z| < 1$.

Розглянемо область $4 < |z| < 6$. Очевидно, що в цій області дане рівняння може мати не більше одного кореня.

Покажемо, що при $|z| < 4$ нові корені не з'являться. Покладемо $f(z) = 5z^7$

$\varphi(z) = z^8 - z^4 + 2$, оцінимо на межі області: $|f(z)| = 5|z|^7$; $|f(z)|\big|_{|z|=4} = 5 \cdot 4^7$ $= (4+1)4^7 = 4^8 + 4^7$, $|\varphi(z)| = \left|z^8 - z^4 + 2\right| \le |z|^8 + |z|^4 + 2$, $|\varphi(z)|\big|_{|z|=4} < 4^8 + 4^4 + 2$

Отже, $|f(z)| > |\varphi(z)|$ для $\forall z$, що лежать в області $|z| < 4$, тому число нулів многочлена визначається числом нулів функції $f(z) = 5z^7$. Це нуль $z = 0$ кратності 7.

Розглянемо область $|z| < 6$. Візьмемо $f(z) = z^8$, а $\varphi(z) = 5z^7 - z^4 + 2$ і оцінимо їх модулі на межі області, тобто при $|z| = 6$, $|f(z)|\big|_{|z|=6} = 6^8 = (5+1)6^7 =$ $5 \cdot 6^7 + 6^7$, $|\varphi(z)|\big|_{|z|=6} < 5 \cdot 6^7 + 6^4 + 2$

Маємо, що $|f(z)| > |\varphi(z)|$, за теоремою Руше даний многочлен має в цій області вісім нулів, причому сім з них лежать в $|z| < 1$. В області $4 < |z| < 6$ лежить лише один нуль многочлена або один корінь рівняння $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$, сім коренів належать кругу $|z| < 1$.

Список використаних джерел

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Наука, 1977. – 444с.

Анотація. Мартиненко О. Застосування комплексного аналізу для знаходження нулів функцій. *У роботі показано можливості застосувань комплексного аналізу при знаходженні нулів функцій. В ній розкрито алгоритм використання теореми Руше та основної теореми алгебри при відшуканні нулів многочленів та коренів рівнянь.*

Ключові слова: *комплексний аналіз, нулі функції, теорема Руше, основна теорема алгебри, корені рівняння, нулі многочленів.*

Abstract. Martunenko E. Application complex analysis for finding zeros of functions. *We show the possibilities of applications of complex analysis in finding the zeros functions. It disclosed algorithm using Rouché's theorem and the fundamental theorem of algebra at finding zeros of polynomials and roots of equations.*

Keywords: *complex analysis, zero of functions, Rouché's theorem, fundamental theorem of algebra, the roots of the equation, zeros of polynomials.*

Мороз Иван
профессор кафедры физики и МОФ

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ

В системе профессиональной подготовки учителя физики студенты изучают следующие базовые курсы теоретической физики: три раздела механики (классическая, релятивистская и квантовая), классическая электродинамика, термодинамика и статистическая физика. Причем классическая и релятивистская механики изучаются сразу после общего курса физики и в значительной мере они являются базой для других разделов теоретической физики. Квантовая механика - это завершающий раздел профессиональной подготовки учителя по образовательно-квалификационному уровню «бакалавр». Следует отметить, что квантовая механика - это относительно молодая наука, которая развивалась достаточно бурно, практически по безошибочному пути и поэтому, в отличие от других разделов теоретической физики, в научной и учебной литературе при ее преподавании не накопилось много ложных теорий и подходов, неудачных методик и традиций.

При подготовке педагогических специалистов образовательно-квалификационного уровня «бакалавр» преподавание теоретической физики осуществляется в соответствии с государственными стандартами, которые по сути, диктуют преподавателю программу действий по формированию научного мировоззрения студентов. Но действующие государственные стандарты не являются идеальными. Так, в первом разделе теоретической физики «Классическая механика», содержательные модули «Основные понятия и законы классической механики» и «Общие теоремы динамики и законы сохранения» дублируют соответствующее содержание курса общей физики, и такая традиционная методика дублирования существует уже много десятилетий, несмотря на то, что в теоретической физике основным инструментом изучения механического движения является аналитическая и релятивистская механика [1].

Релятивистская и классическая механики в педагогических университетах изучаются в одном семестре, и многие вопросы (общие теоремы динамики, законы сохранения, столкновения и рассеивания частиц и т.д.), исходя из принципа фундаментализации и интеграции знаний, следует рассматривать с более общих - релятивистских позиций, как это сделано, например, в статье [2] и в учебном пособии [3].

После классической механики и специальной теории относительности изучается электродинамика. Она по своей сути является релятивистски-ковариантной теорией, но ее обучение в педагогических университетах не базируется на принципах теории относительности. Достаточно пересмотреть действующие учебные программы по физике и государственные стандарты, чтобы убедиться в том, что при изучении электродинамики в высших педагогических учебных заведениях почти не предусмотрено использование результатов и методов специальной теории относительности, несмотря на то, что эти разделы физики органически связаны между собой. Такой же вывод можно сделать и при анализе учебных пособий по электродинамике. Причем этот анализ показывает, что при рассмотрении стационарных зарядов все авторы явно и справедливо принимают закон Кулона как фундаментальный закон, из которого вместе с принципом суперпозиции создается теория стационарного электрического поля. При изучении стационарных токов теория стационарного магнитного поля строится аналогично электростатике: формулируются законы Ампера и Био-Савара-Лапласа, причем так, что у студентов и учеников они ошибочно воспринимаются вместе с законом Кулона, как фундаментальные законы природы. Понятно, что такая устаревшая методика преподавания магнитостатики объясняется наглядностью вроде бы очевидных эмпирических фактов и аналогией с построением электростатики, которая достаточно легко воспринимается.

Значительный шаг вперед при изучении магнитных явлений исполнили известные физики А. Матвеев, Е. Парселл, А. Пинский, Р. Фейнман, Д. Пеннер, А. Коновал и др., которые сделали попытку создать электродинамику на основе принципа относительности, но в их работах решается лишь незначительная часть вопросов дидактики электромагнетизма.

При анализе курсов теоретической физики на предмет их интегрированного обучения и фундаментализации, нами не ставилась задача рассмотреть все ее базовые разделы. В рамках одного исследования - это невыполнимая задача. Мы ограничились лишь одним базовым курсом - «Термодинамика и статистическая физика» и проанализировали возможные пути его интегрированного обучения, что обеспечит также его фундаментализацию. Такой выбор определяется тем, что термодинамика и статистическая физика - это очень важный раздел теоретической физики, при изучении которого формируется физическое мировоззрение будущего учителя и его профессиональные качества, связанные с обобщениями и конкретизацией содержания учебного материала из школьного курса физики.

Интегрированный подход к изучению термодинамики и статистической физики позволяет перевести бытовые наблюдения, и возникшие при этом интуитивные подходы к пониманию окружающего мира, основанные на качественных понятиях, на язык научных определений и математических формул, из которых возможны количественные выводы и обобщения. Предметной областью термодинамического и статистического методов является весь окружающий мир, поскольку нет ни одной области наук о материи, в которой не проявлялись бы закономерности, изучаемые этими методами, прежде всего такое свойство, как взаимопревращаемость различных видов энергии. В этом смысле термодинамика и статистическая физика является основой многих прикладных (инженерных) наук.

В наше время накопилось достаточно много учебно-методической литературы по статистической физике и термодинамике. Классическими учебными пособиями, на которых выучилось не одно поколение физиков, инженеров и учителей физики, есть пособия И. Базарова, И. Новикова, В. Ноздрева, А. Путилова, Л. Радушкевича, Коновалова и другие. С основным содержанием термодинамики можно ознакомиться по другим книгам, в том числе и в пособии автора данного сообщения [4], в котором теоретические вопросы иллюстрируются большим количеством решенных задач, которые неразрывно связаны с основным текстом и являются его дополнением и развитием.

В указанной учебной литературе термодинамический и статистический методы, как правило, рассматриваются отдельно. Это создает у студентов представление о существовании двух, не связанных между собой разделов курса теоретической физики. Стоит отметить, что этому способствуют также учебные программы, название учебной дисциплины («Термодинамика и статистическая физика»), соответствующее название кафедр в некоторых вузах и даже государственные стандарты. Традиционный разрыв этих двух методов в профессиональной подготовке не только учителей физики, но и физиков-исследователей, не ликвидируется несмотря на то, что в научной физической литературе термодинамический и статистический методы исследования являются двумя взаимодополняющими методами единого раздела теоретической физики - статистической термодинамики (а возможно, более точным является название «Статистическая физика»). В наиболее известном монографическом курсе теоретической физике Л. Ландау и Е. Лифшица [5] даже не существует раздела «Термодинамика».

Для традиционной методики обучения термодинамики характерны принципиальные недостатки. Содержание, структура и методика обучения традиционных вопросов термодинамики в высших учебных заведениях в настоящее время не соответствует сути и методологии современной физики, поскольку их феноменологическое изучение в недостаточной степени отражает внутренние, глубинные закономерности природы и не отвечает современным общефизическим требованиям. Прежде всего, она носит преимущественно формальный и аксиоматический характер. При последовательном изучении классической термодинамики по традиционной методике (как феноменологической науки) нет возможности использовать знания студентов из общего курса физики (раздел «Молекулярная физика») о молекулярно-атомном строении вещества и о статистических законах, которые при этом играют доминирующую роль в закономерностях протекания процессов и определяют свойства веществ, и, как следствие, студенты не в полном объеме получают существенно важную информацию. Это не только тормозит процесс формирования физического стиля их мышления, но и вызывает психологическое неприятие формального описания явлений. Естественная заинтересованность студентов требует не только получения желаемого результата путем манипуляции с формулами, но и объяснения механизма протекания процессов, что феноменологическая термодинамика не может дать в принципе.

Итак, на данном этапе развития физического образования в системе подготовки учителей физики существует, на наш взгляд, очевидная и насущная проблема научно-методического обоснования и разработки новой системы обучения термодинамики и статистической физики в высших учебных заведениях, которая не имела бы указанных выше недостатков. Это, в первую очередь касается педагогических университетов, поскольку от профессионального уровня учителей в значительной степени зависит уровень общенаучной подготовки и интеллектуальное развитие молодежи.

Руководствуясь концепцией фундаментализации науки и применяя эту концепцию в учебных дисциплинах, нами выполнен теоретический и методический анализ научной и учебно-методической литературы по вопросам термодинамики и статистической физики, который показывает необходимость перестройки структуры содержательного компонента раздела теоретической физики «Термодинамика и статистическая физика» для студентов педагогических вузов, и предложена авторская структура содержательного компонента методики интегрированного обучения статистической термодинамики [6].

В первой главе данного исследования анализируются современные традиционные методики преподавания основ термодинамики. Следующие два раздела посвящены рассмотрению методики преподавания основ статистической теории, статистическому обоснованию термодинамики, законы которой в современной учебной литературе рассматриваются как независимые, т.е. фундаментальные и построению методической системы изучения вопросов термодинамики исключительно на основе статистической теории, при этом ее законы теряют статус фундаментальных. Фундаментальными в данном случае остаются только свойства пространства и времени и общие положения статистической физики. То есть вся термодинамика может быть построена на последовательно статистических принципах.

В заключительном разделе рассматривается авторская методика и технология освещения в учебном процессе в системе профессиональной подготовки современного учителя физики некоторых важных тем, которые демонстрируют эффективность изучения макроскопических систем на основе статистической теории.

Таким образом, предложенная нами фундаментализация учебной дисциплины «Термодинамика и статистическая физика», которая обеспечивается их интегрированным обучением, это реализация в учебном процессе профессиональной подготовки учителя физики в педагогических университетах концепции А. Эйнштейна, который отмечал, что физическая наука должна основываться на возможно меньшем числе логично независимых гипотез, позволяющих установить причинную взаимосвязь всего комплекса физических процессов [7].

Литература

1. Жирнов Н.И. Классическая механика / Н.И. Жирнов – М.: Просвещение, 1980. – 303 с.
2. Мороз І.О. Введення основних характеристик і законів стаціонарного магнітного поля із загальних релятивістських позицій / І.О. Мороз // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць: в 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2010. – Випуск VIII, Т. 2. – С. 227 – 237.
3. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності: навч. посіб. / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов – Суми: Видавництво «МакДен», 2011. – 336 с.
4. Мороз І.О. Основи Термодинаміки: навч. посіб. / І.О. Мороз. – Суми: Видавництво «МакДен», 2011. – 352 с.
5. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1964. – Т.V: Статистическая физики. – 1964. – 567 с.

6. Мороз І.О. Основи термодинаміки та статистичної фізики: навч. посіб. / І.О. Мороз. – Суми: Видавничий дім «Папірус», 2012. – 574 с.
7. Эйнштейн А. Сборник научных трудов: в 4 т. / А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1967. – Т. IV. – 1967. – 600 с.

Аннотация. Мороз И. Некоторые замечания об изложении теоретической физики в педагогических университетах.

В статье проанализированы особенности изложения теоретической физики в педагогических университетах. Показано, что на данном этапе развития физического образования в системе подготовки учителей физики существует очевидная и насущная проблема научно-методического обоснования и разработки новой системы обучения термодинамики и статистической физики, которая базируется на концепции А. Эйнштейна о фундаментализации науки.

***Ключевые слова**: теоретическая физика, фундаментализация учебных дисциплин, интегрированное обучение.*

Abstract. Moroz I. Some remarks on the presentation of theoretical physics in pedagogical universities.

The article analyzes the features of the presentation of theoretical physics in pedagogical universities. It is shown that at this stage of the development of physical education in the system of the training of teachers of physics there is an obvious and urgent problem of the scientific and methodological justification and development of a new system of teaching thermodynamics and statistical physics that is based on the concept of A. Einstein on the fundamentalization of science.

***Keywords**: theoretical physics, fundamentalization of educational disciplines, integrated training.*

Одінцова Оксана
доцент кафедри математики
oincube@yahoo.com

ТЕОРІЯ ІГОР І ПОЛІТИКА

Конфліктні ситуації завжди звертали особливу увагу вчених різних галузей науки. Чому на деяких ринках фірми співпрацюють, а на інших – ні; до яких заходів слід вдаватися власникам газового хабу, щоб не допустити вторгнення конкурентів – лише в економіці конфлікти зустрічаються дуже часто і мають різнобічний характер. Саме, за допомогою теорії ігор – теорії математичних моделей прийняття рішень в умовах конфлікту або невизначеності, можна знайти відповіді на складні запитання економічного життя [4].

На сьогодні теорія ігор інтенсивно розвивається, про що свідчать Нобелевські премії ряду економістів, які вивчали теорію ігор (Дж. Неш та інші). Великий інтерес до неї обумовлений перш за все тим, що сьогодні теорія ігор точно розв'язує економічні задачі, фактично за одним показником – виграшем гравця. Отримавши приблизну інформацію про середовище гри, та змоделювавши виграші гравців та саму гру, за математичними алгоритмами можна отримати вигідніші шляхи своїх дій [1].

Теорія ігор переросла свої економічні та математичні межі, ставши невід'ємною частиною біології, соціології, психології, політології, військової справи тощо. Фахівці з теорії ігор є незамінними не лише у науці, а й в аукціонній, виборчій, державній та інших діяльностях [4]. Зокрема, в даній статті розглянуто математичні моделі конфліктної ситуації, яка в сучасній політичній науці отримала назву «Карибська криза», та її розв′язування з точки зору теорії ігор.

Розглянемо спочатку основні поняття такого розділу математичного програмування як теорія ігор.

Математична модель конфліктної ситуації називається *грою*, сторони, що беруть участь у конфлікті – *гравці*, результат конфлікту – *виграш* одного із гравців (або *програш* іншого). Досить часто виграш (програш) має числову характеристику, причому в економічних задачах він виражається в грошових одиницях. Для кожної формалізованої гри вводяться *правила*, тобто система умов, яка визначає:

1) варіанти дій гравців;
2) об'єм інформації кожного гравця про поведінку інших гравців;
3) результат (виграш), до якого приводить кожна сукупність дій.

Ігрова ситуація (гра) характеризується: наявністю чітких правил, наявністю одного або декількох гравців (учасників), які обирають певну лінію поведінки (*стратегію*) та мають на меті отримання виграшу. Інтереси кожного гравця виражаються через *функцію виграшу*(*функцію платежу*). Зрозуміло, що мета кожного гравця – це оптимізація своєї функції (максимізація виграшу або мінімізація програшу). Кожен гравець робить *ходи* – усвідомлений вибір однієї з можливих дій. Під *стратегією гравця* розуміють систему правил, які визначають ходи гравця на кожному кроці гри, в залежності від ситуації, що склалася. [1]

Для того, щоб розв′язати гру, кожен гравець повинен застосувати оптимальну стратегію, тобто один із гравців отримає максимальний виграш, коли інший буде дотримуватись своєї стратегії. У той же час, другий гравець повинен отримати мінімальний програш, якщо перший буде дотримуватись своєї стратегії.

Ігри класифікують по-різному, в залежності від кількості гравців, характеру їх поведінки (стратегічні, статистичні (з нераціональними гравцями, тобто гравцями, що не додержуються правил)), за кількістю стратегій, за властивостями виграшу (див. рис.1).

За властивостями виграшу ігри поділяються на : ігри з нульовою та ненульовою сумами.

Гра з нульовою сумою – де загальний виграш обох (усіх) гравців дорівнює нулю.[2] Тобто загальний капітал протягом гри не змінюється, а лише перерозподіляється між гравцями в залежності від результатів гри. Так у парній грі (2 гравця) з нульовою сумою інтереси гравців цілком протилежні, бо виграш одного – це рівно стільки ж програш другого. Такі ігри ще носять назву *антагоністичних* [2].

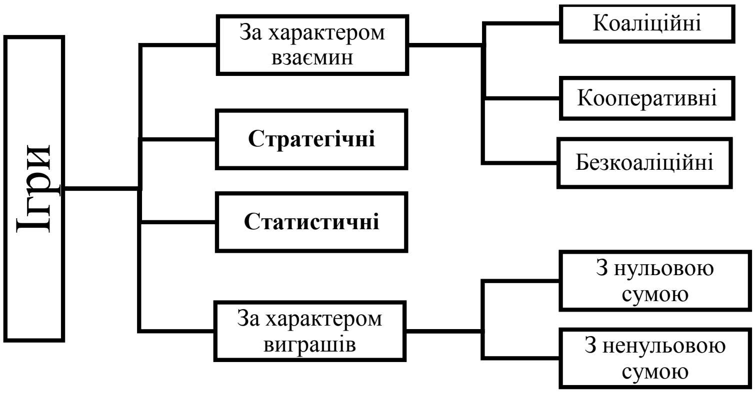


Рисунок 1. Класифікація ігор.

В *іграх з ненульовою сумою* (або *додатною сумою*) – гра ведеться за виграш, що складається зі ставок гравців, тобто виграш одного ге означає програш іншого. Прикладом гри з ненульовою сумою можуть бути торгівельні (політичні) стосунки між країнами. Більший чи менший виграш від таких стосунків всі сторони. В іграх з ненульовою сумою гравцям доцільно координувати свої дії, через це такі ігри називаються *коаліційними*[2].Приклад, який буде розглянуто нижче, є прикладом парної гри з ненульовою сумою.

Перейдемо до загальних питань, пов′язаних із записом та розв′язуваням парних ігор.

Нехай гра відбувається між двома учасниками A і B.

Учасник A користується ходами (стратегіями) A_1, A_2, …, A_{m}. Учасник B користується ходами (стратегіями) B_1, B_2, …, B_{n}. Правила гри наступні: кожен з гравців обирає *по одній із своїх* стратегій (ці стратегії ще називаються чистими), перший гравець - A_i, i=1,2,…,m, та другий гравець - B_j , j =1,2,…, n вважається, що і на цьому *гру завершено*.

Пара (A_i, B_j) називається *ігровою ситуацією*. Повторення гри полягає у створенні нової ігрової ситуації ($A_{i'}$, $B_{j'}$).

Ступінь зацікавленості гравців, як уже зазначалося раніше, функції виграшу u для першого гравця A та v для другого B, при цьому $u_{ij} = u(A_i, B_j)$, $v_{ij} = (A_i, B_j)$ для ситуації (A_i, B_j). Ці функції найчастіше задаються матрицею виграшів (платіжною матрицею або матрицею гри). Рядки цієї матриці стратегії гравця A, стовпці – стратегії гравця B.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} B_1 & & B_2 & \ldots & B_{\text{j}} & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_i \\ \ldots \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} (u_{11},v_{11}) & (u_{12},v_{12})\ldots & (u_{1j},v_{1j})\ldots & (u_{1n},v_{1n}) \\ (u_{21},v_{21}) & (u_{22},v_{22})\ldots & (u_{2j},v_{2j})\ldots & (u_{2n},v_{2n}) \\ \ldots & & & \\ (u_{i1},v_{i1}) & (u_{i2},v_{i2})\ldots & (u_{ij},v_{ij})\ldots & (u_{in},v_{in}) \\ \ldots & & & \\ (u_{m1},v_{m1}) & (u_{m2},v_{m2})\ldots & (u_{mj},v_{mj})\ldots & (u_{mn},v_{mn}) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Такий запис гри називається *нормальною формою,* самі ж ігри, до запису яких можна застосовувати матриці, називаються *матричними* [2].

Для опису гри та знаходження її оптимального розв′язку користуються такими поняттями як верхня, нижня ціна гри, гра із сідловою точкою.

Нехай маємо біматричну гру з нульовою сумою, матрицю якої подано вище.

Нижньою ціною гри називається число α таке, що

$$\alpha = \max_i (\min_j (u_{ij}, v_{ij}))\ [2].$$

Стратегія A_{i0}, що відповідає нижній ціні гри α, називається *максимінною* та гарантує гравцю A отримання виграшу більше ніж α, як би не грав гравець B.

Аналогічно, верхнею ціною гри називається таке число β, що

$$\beta = \max_i (\min_j (u_{ij}, v_{ij}))\ [2].$$

Стратегія B_{j0}, що відповідає верхній ціні гри β, називається *мінімаксною* та гарантує гравцю B отримання програшу менше ніж β, як би не грав гравець A.

Якщо $c_{i_0 j_0}$ – виграш гри , то $\alpha \le c_{i_0 j_0} \le \beta$. У випадку $\alpha = c_{i_0 j_0} = \beta$ число c називається *чистою ціною гри* або *значенням гри*, при цьому стратегії A_{i0} та B_{j0} називаються *оптимальними,* а сама гра називається грою із сідловою точкою (A_{i0}, B_{j0}) [2].

Антагоністичні ігри 2-х гравців із сідловою точкою зустрічаються досить рідко. Найчастіше мова йде про ігри, в яких $\alpha < \beta$. При цьому вказати заздалегідь ціну вигашу не можливо, навіть якщо гравці будуть дотримуватись своїх обережних стратегій : A – максимінної , а B – мінімаксної, можна лише стверджувати, що виграш c буде задовольняти нерівність $\alpha \le c \le \beta$.

У теорії ігор доведено [2], що гравець може збільшити свій середній виграш, якщо випадково з певним співвідношенням частот чергуватиме застосування своїх стратегій.

Під *мішаною стратегією* розуміють розподіл ймовірностей використання ходів гравцем на множині всіх його стратегій. Мішані стратегії гравців записують як вектор ймовірностей: для першого гравця A – $X = (P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_m))$, для другого гравця B – $Y = (P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n))$. Зрозуміло, що стратегія A_l буде чистою, якщо всі $P(A_i) = 0$, а $P(A_l) = 1$, аналогічно для чистої стратегії B_k.

У випадку застосування гравцем A мішаної стратегії, виграш гри – це випадкова величина, що знаходится як математичне сподівання виграшу

$$u = M(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} u_{ij} P(B_j)) P(A_i).$$

Аналогічно для гравця B.

Приклад 1. Нехай дано гру

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (4,3) & (5,1) & (6,2) \\ (2,1) & (8,4) & (3,6) \\ (3,2) & (9,1) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

та відомо, що $X(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (тобто гравцю A всі стратегії A_1, A_2, A_3 слід застосовувати із ймовірністю $\frac{1}{3}$), а $Y(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (тобто гравцю B всі стратегію B_1 не застосовувати зовсім,а стратегії B_2, B_3 слід застосовувати із ймовірністю $\frac{1}{2}$). Обчислити виграші кожного з гравців для запропонованих мішаних стратегій.

Отже, $u(X) = \frac{1}{3}(0 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6) + \frac{1}{3}(0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 3) + \frac{1}{3}(0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 2) = \frac{1}{2}$,

а $v(Y) = 0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1) = \frac{5}{2}$.

Для запропонованих мішаних стратегій виграш A становить $\frac{1}{2}$, а виграш B – $\frac{5}{2}$.

Розглянемо тепер Карибську кризу як матричну гру.

Історична довідка [5].

Події охоплюють період з травня по листопад 1962 рік.

Травень 1962 року – в СРСР схвалення рішення про розміщення на території Куби балістичних ракет середнього радіуса дії та початок передислокації військ (4 крейсери, 11 підводних човнів, близько 50 тис. військовослужбовців), як відповідь на розгортання США балістичних ракет на території Туреччини та неодноразові звернення керівництва Куби військову допомогу проти США.

8 вересня 1962 р. - перші вантажі прибули на Кубу. А *14 жовтня 1962 р.* на Кубі вже налічувалося 40 балістичних ракет і більша частина військовослужбовців, про що свідчили фотографії території Куби, які зробили розвідувальні літаки ВВС США U-2.

Після цього в США розглядали 3 можливих варіанти розвитку подій:

- знищити ракети точковими ударами,
- провести повномасштабну операцію на території Куби або
- запровадити морську блокаду острова.

Перший варіант був відкинутий через велику загрозу для самих США, звенення до ООН та інші дипломатичні заходи були визнані неефективними. Тому *20 жовтня 1962 р.* США запровадили військово-морську блокаду – «карантин» у 500 миль, в якій брало участь 180 кораблів ВМС США.

27 жовтня 1962 р. ситуація загострилася, коли радянські війська збили розвідувальний літак U -2 над Кубою. Цей день називають «чорною суботою», бо це був день, коли світ був найближче до глобальної ядерної війни.

Розглянемо опис Карибської кризи до 27 жовтня 1962 оку як матричну гру з ненульовою сумою [3].

У кожного гравця (СРСР та США) є 2 стратегії, подані в таблиці 1, відповідно матриця гри має вид (таблиця 1).

Таблиця 1.

		СРСР	
		Виведення	*Розміщення*
США	*Блокада*	(3; 3)	(2; 4)
	Вторгнення	(4; 2)	(1; 1)

Для СРСР привабливішою є ситуація, яка складеться після розміщення ним ракет на території Куби за умови, що США не будуть застосовувати широкомасштабних військових дій на острові. Найкраще для США події розгортатимуться тоді, коли ракети будуть вивезені з Куби, а їхні військові контролюватимуть ситуацію.

Найгіршою для обох гравців є ситуація конфронтації, яка може призвести до застосування ядерної зброї.

Точками рівноваги є (2, 4) та (4, 2). Так, якщо СРСР обере стратегію «розміщення», а США – «блокада», то вектор виграшів буде (2, 4). Якщо перший гравець змінить стратегію на«вторгнення», то отримає виграш, рівний 1, якщо ж СРСР застосує стратегію «вивід», то отримає менший виграш – 3. Аналогічно виглядає ситуація стосовно іншої точки рівноваги.

Знайдемо верхню та нижню ціни розглядуваної матричної гри, розширивши таблицю 1.

Таблиця 2.

		СРСР		
		Виведення	*Розміщення*	$\min\limits_i u_{ij}$
США	*Блокада*	(3; 3)	(2; 4)	2
	Вторгнення	(4; 2)	(1; 1)	1
	$\max\limits_j v_{ij}$	3	4	α = max (2,1) = 2, β = min (3,4) = 3

Оскільки $\alpha \neq \beta$, то сідлової точки не існує, а сама гра є грою з ненульовою сумою.

Припустивши, що загроза застосування ядерної зброї не була б такою великою, гру можна б було зобразити матрицею, поданій у таблиці 3 [3].

Таблиця 3.

		СРСР	
		Виведення	Розміщення
США	Блокада	(3; 3)	(1; 4)
	Вторгнення	(2; 2)	(4; 1)

За таких умов обставин компромісна ситуація, яка приводить до результату (3; 3). Якщо, незважаючи на блокаду, ракети залишатимуться на Кубі, то така ситуація найкраща для СРСР і програшна для США (1, 4). Тому США намагатимуться поліпшити результат і виберуть іншу стратегію – «вторгнення» для усунення військової загрози від своєї території та знищення своїх ракет. У відповідь на застосування військової сили СРСР може змінити стратегію і вивести ракети, тоді виграш США буде суттєво зменшуватися (2; 2). Знову ж таки, якщо ракети будуть виведені, то привабливішою для США є стратегія запровадження блокади з результатом (3; 3).У такій інтерпретації гри точки рівноваги не існує.

Знаходження верхньої та нижньої ціни розглядуваної матричної гри шляхом розширення таблиці 3 як це було з таблицею 1.

Таблиця 4.

		СРСР		
		Виведення	*Розміщення*	$\min\limits_i u_{ij}$
США	*Блокада*	(3; 3)	(1; 4)	1
	Вторгнення	(2; 2)	(4; 1)	2
	$\max\limits_j v_{ij}$	3	4	α = max (2,1) = 2, β = min (3,4) = 3

дає результати, аналогічні до першого випадку .

У мішаних стратегіях оптимальною для США буде стратегія X = (0,5; 0,5), а для СРСР – стратегія Y = (0,75; 0,25). Обчислимо виграші обох сторін :

– у першому випадку

$u(X) = \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 1) + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4) = \frac{5}{2}$ – для США,

$v(Y) = \frac{3}{4}(\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2)+\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 1)=\frac{5}{2}$ – для СРСР,

$\alpha = 2 < u(X) = V(y) = \frac{5}{2} < 3 = \beta$;

– у другому випадку отримаємо такі самі значення виграшів: $u(X) = \frac{5}{2}$, $v(Y) = \frac{5}{2}$.

Отже, у виграші не була б жодна зі сторін.

Історично ситуація далі розвивлась так: конфлікту вділося уникнути внаслідок переговорів, які велися 2 тижні. СРСР забрали ракети та ядерну зброю з території Куби, натомість США зняли військово-морську блокаду, дали гарантії ненападу на Кубу та вивели війська з Туреччини. Однозначно сказати, хто переміг, а хто програв не можна, оскільки кожна зі сторін отримала певні преференції та змушена була піти на поступки. Карибська криза стала переломним моментом у гонці озброєнь та холодній війні [5].

Список використаних джерел

1. Воробьёв Н.Н. Теория игр / Воробьёв Н.Н.// Новое в жизни, науке и технике, Серия «Математика, кибернетика». – М.: Знание, 1976.– вып. 4. – 66 с.
2. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование / Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Кузнецов А.Б.– М.: Высшая шк., 1980.– 300с.
3. Вовк Р.В. Моделювання міжнародних відносин: Навч. посібник / Р.В. Вовк – К.: Знання, 2012. – 246 с.
4. Десять фактов о теории игр [Електроний ресурс] / К. Сонин // Скрижали науки. — 2011. — С 14. — Режим доступа к журн.: http://trv-science.ru/2011/08/16/10-faktov-o-teorii-igr.
5. https://ru.wikipedia.org/ wiki/ Карибский кризис.

Анотація. Одінцова О.О. Теорія ігор та політика.

У статті розглянуто основні положення теорії ігор та застосування методів теорії ігор для опису та розв'язування конфліктних ситуацій на прикладі моделювання так званої Карибської кризи.

Ключові слова: *гра, гравці, стратегія, ціна гри, сідлова точка, Карибська криза .*

Abstract. Odintsova Oksana. The theory of games and politics.

There are consider the theory of games' basic facts and how to use metods of the theory of games to describe and to solve conflict situations. The modeling of the Caribbean crisis is consider as exsample.

Key words : *game, players, strategy, games price, saddle point, the Caribbean crisis.*

Петренко Сергій
старший викладач кафедри інформатики
s.petrenko@fizmatsspu.sumy.ua
Петренко Людмила
викладач кафедри математики

ПРО РЕЗУЛЬТАТИ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ФОРМУВАННЯ ІКТ-КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Сучасний учитель математики зобов'язаний бути компетентним в сфері ІКТ, а значить уміти застосовувати в педагогічній діяльності комп'ютерно-орієнтовані середовища.

ІКТ-компетентність учителя математики розглядається як інтегративна якість особистості, яка поєднує свідому необхідність здобувати нові знання та досвід у галузі інформатичних і математичних дисциплін, уміння, навички, здібності і досвід раціонально відбирати й свідомо використовувати інформаційно-комунікаційні технології в професійній діяльності учителя.

Нами виділено складові ІКТ-компетентності учителя математики: мотиваційну, когнітивну, діяльнісну, комунікативну, рефлексивну.

Експеримент з формування ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики в процесі фахової підготовки проводився на фізико-математичних факультетах Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка, Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка і факультеті природничої та фізико-математичної освіти Глухівського національного педагогічного університету імені О. Довженка.

Педагогічний експеримент було реалізовано у три етапи:

- констатувальний (2011 – 2013 роки) – метою якого було вивчення сучасного стану підготовки майбутніх учителів математики та визначення рівня сформованості ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики у момент запровадження авторської моделі;
- формувальний (2011 – 2016 роки) – метою якого стало впровадження моделі формування ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики;
- контролюючий (2014 – 2016 роки) – метою якого є визначення рівня сформованості ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики та їх готовності до застосування інформаційно-комунікаційних технологій в майбутній професійній діяльності учителя математики.

На різних етапах дослідження в експерименті брали участь 203 студенти і 18 викладачів.

Рівні сформованості складових ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики визначалися у відповідності до розроблених критеріїв та їх показників і вимірювалися на початку та наприкінці експерименту. Достовірність отриманих результатів перевірялася за статистичним критерієм Колмогорова-Смирнова [1, с106] на рівні значущості 0,05.

На етапі констатувального експерименту фіксувалися початкові дані стосовно рівня ІКТ-компетентності за різними показниками. Аналіз емпіричних даних рівнів сформованості складових ІКТ-компетентності показав, що на етапі констатувального експерименту контрольна і експериментальні групи суттєво не відрізняються.

Контрольні заміри рівнів сформованості складових ІКТ-компетентності учителя математики відбувалися в період з 2014 року по 2016 рік.

Для вимірювання мотивації успіху було застосовано опитувальник Магомет-Емінова [3, с. 186] модифікований для студентів математичних спеціальностей. Після опрацювання даних отримано наступні результати, що представлені на рисунку 1.

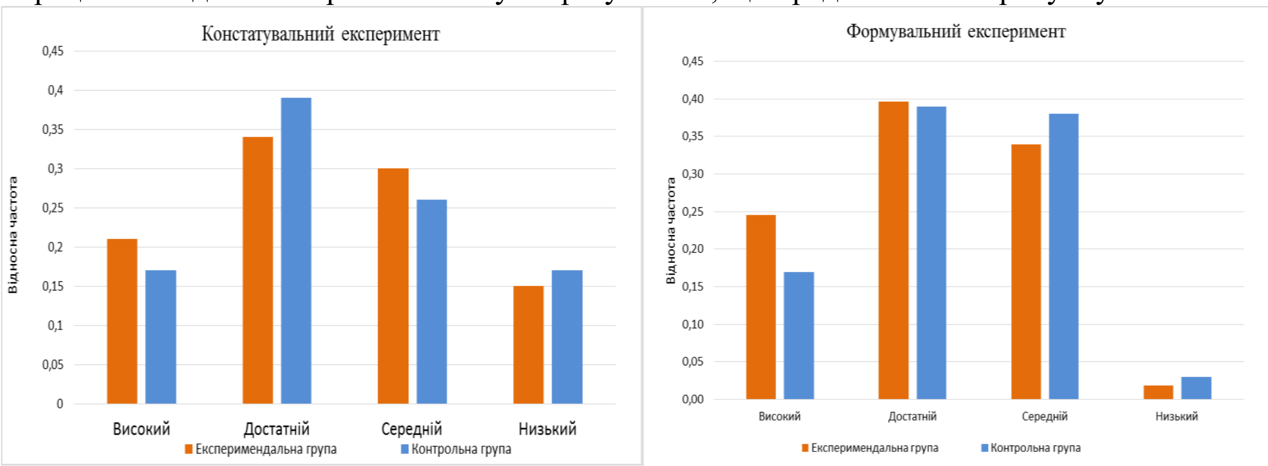


Рис. 1 Графічне представлення мотивації успіху на етапах констатувального і формувального експерименту

З метою визначення рівня сформованості когнітивної складової була використана анкета в вигляді картки на заповнення таблиць про області застосування окремих інструментів у різному програмному забезпеченні. Отримані результати представлені на рисунку 2.

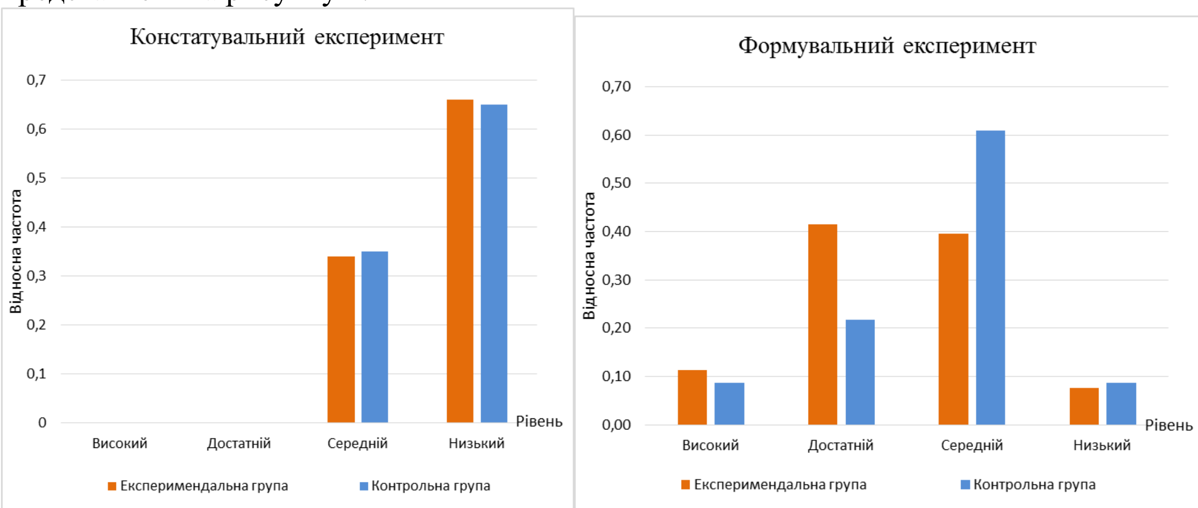


Рис. 2 Графічне представлення сформованості когнітивної складової на етапах констатувального і формувального експерименту

Для оцінки рівня сформованості діяльнісного компоненту ІКТ-компетентності були передбачені контрольні роботи в яких перевірявся навички і досвід використання ІКТ технологій. Отримані результати представлені на рисунку 3.

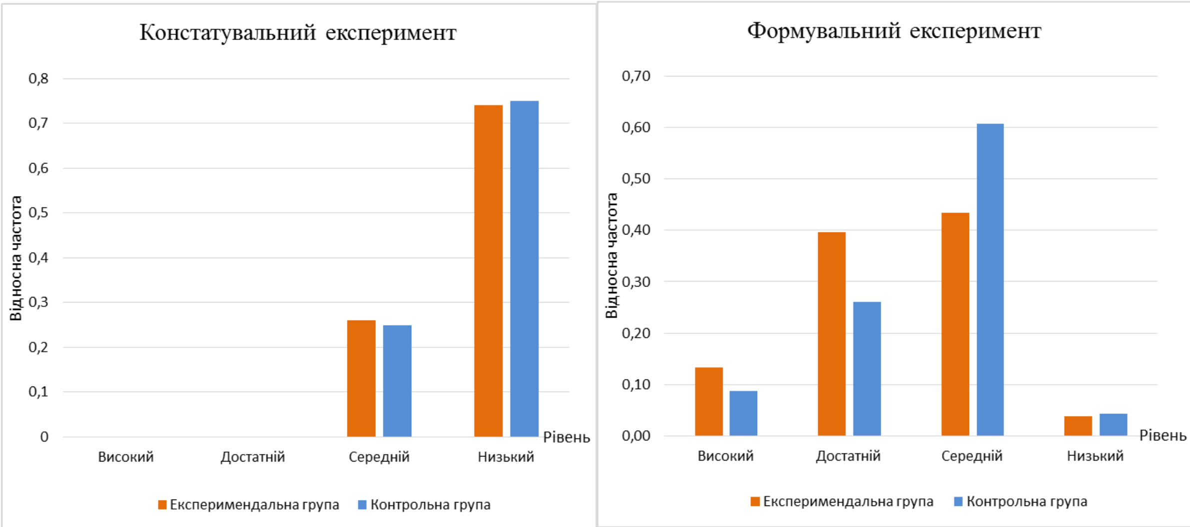


Рис. 3 Графічне представлення сформованості діяльнісного компоненту на етапах констатувального і формувального експерименту

Тест «КОС-2», запропонований Синявським і Федорішиним [4, с. 218], модифікований для визначення комунікативних якостей в структурі ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики. Статистично оброблені результати приведено на рисунку 4.

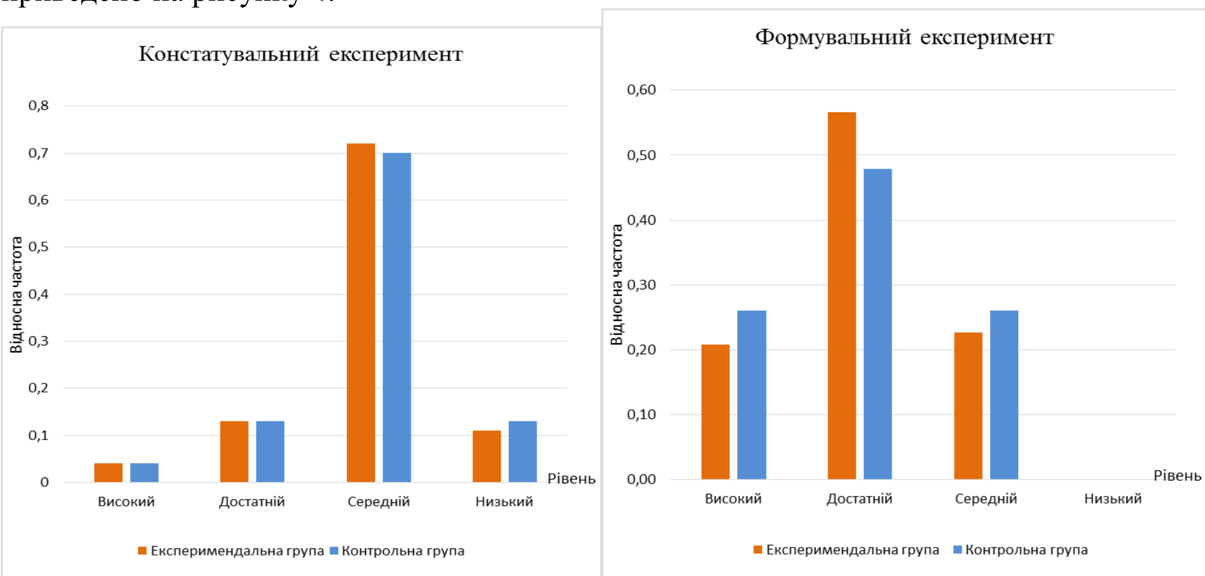


Рис. 4 Графічне представлення комунікативних якостей на етапах констатувального і формувального експерименту

Опитувальник Карпова [2, с. 53] модифікований для студентської аудиторії майбутніх учителів математики було використано для діагностики рівня сформованості рефлективності. Отримані в результаті статистичного опрацювання дані представлені на рисунку 5.

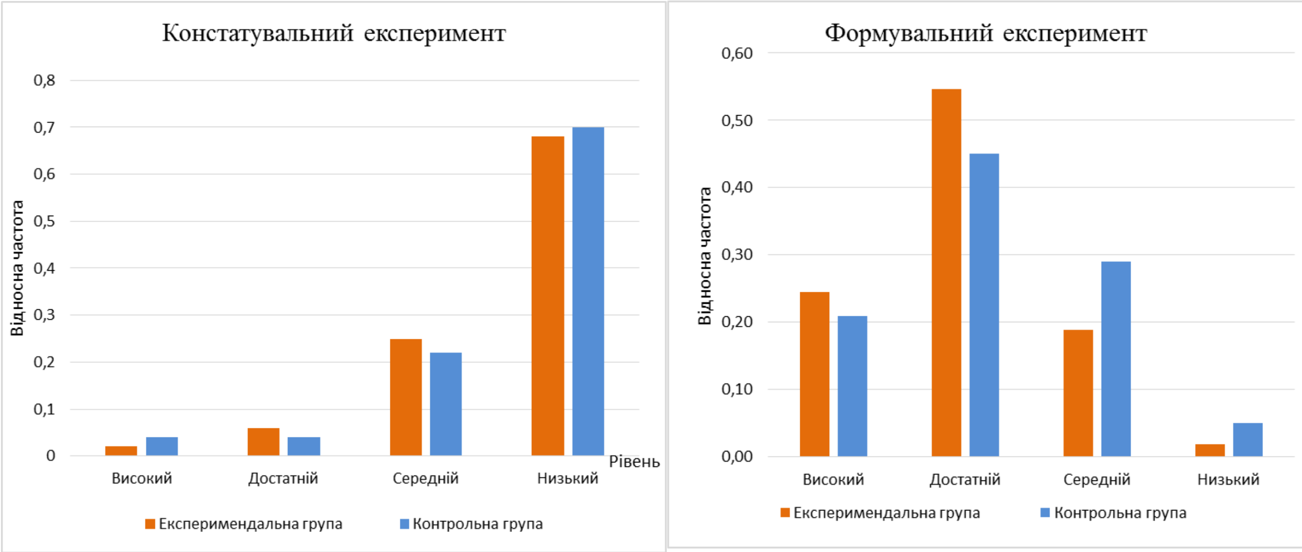


Рис. 5. Графічне представлення рівня сформованості рефлективності
на етапах констатувального і формувального експерименту

Статистичний аналіз емпіричних результатів, проведений за методикою Колмогорова-Смирнова за критерієм значущості 0,05 показав, що рівні сформованості складових ІКТ-компетентності в контрольній і експериментальній групах в кінці дослідження відрізнялися суттєво, що не можна пояснити випадковими причинами.

Висновок. Результати експерименту показують, що складові компоненти ІКТ-компетентності формуються і в експериментальній і в контрольній групах. Порівняльний аналіз показників відносного приросту по групах доводить, що в експериментальній групі цей процес проходив динамічніше, це дає можливість зробити висновок, що впровадження в освітній процес підготовки майбутніх учителів математики моделі формування ІКТ-компетентності дає позитивний результат, причому на високому і достатньому рівнях.

Список використаних джерел

1. Грабарь М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях Непареметрические методы./ М. И. Грабарь, К. А. Краснянская// М., «Педагогика», 1977. – 136 с.
2. Карпов А. В. Рефлексивность как психическое свойство и методика ее диагностики Психологический журнал, 2003. Том 24. № 5 – с 45 – 57
3. Магомед-Эминов М.Ш. Мотивация достижения: структура и механизмы. Дис. … канд. психол. наук. М., МГУ, 1987. – 343 с.
4. Фетискин Н.П., Козлов В.В., Мануйлов Г.М. Социально-психологическая диагностика развития личности и малых групп. - М., Издательство Института Психотерапии. 2005. - 490 с.

Анотація. Петренко С., Петренко Л. Про результати педагогічного експерименту з формування ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики В статті описано педагогічний експеримент з формування ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики в процесі фахової підготовки. Розглядається вплив авторської моделі формування ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики на процес професійної підготовки. На рівні значущості 0,05 за критерієм Колмогорова-Смирнова підтверджується гіпотеза про те, що при впровадженні моделі формування ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики формування ІКТ-компетентності проходить значно динамічніше.

Ключові слова: *педагогічний експеримент, ІКТ-компетентність,, професійна підготовка використання комп'ютера в навчанні математики, підготовка вчителя математики, критерій Колмогорова-Смирнова.*

Abstract. Petrenko S., Petrenko L. I.The results of the pedagogical experiment on the formation of ICT-competence of future mathematics teachers. The article describes the pedagogical experiment on the formation of ICT-competence of future mathematics teachers in the process of professional training. The influence of the authorial model of the formation of ICT-competence of future mathematics teachers on the process of their professional training is considered. At the significance level 0.05 by the Kolmogorov-Smirnov criterion, the hypothesis is confirmed that, introducing the model of forming ICT-competence of future mathematics teachers in the educational process, the formation of ICT-competence passes more dynamically.

Keywords: *pedagogical experiment, ICT-competence, professional training, using of computer for educating mathematics, mathematics teacher training, Kolmogorov-Smirnov test*

Погребний Валерій
Доцент кафедри математики
mathematicsspu@gmail.com

ЩЕ ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ТОПОЛОГІЧНЕ ВКЛАДЕННЯ

Дана робота є продовженням роботи [3], і присвячена вивченню проблем топологічного вкладення деяких класів топологічних лінійних (або векторних) решіток, які являють собою важливий тип упорядкованих топологічних лінійних просторів.

Нехай E_1, E_0 – топологічні лінійні решітки (ТЛР) і E_1 алгебраїчно вкладена в E_0. Розглянемо ще один випадок для E_1.

Нехай X – зчислено-нормований топологічний лінійний простір (ТЛП). Ці простори є локально опуклими ТЛП, а їх топологія $\tau(X)$ задається зчисленим сімейством півнорм $\left(p_i(x)\right)_{i\in N}$. Збіжність послідовностей в цих просторах (послідовностей достатньо для адекватного задання топологічної структури, оскільки ці простори метризуємі) часто називається (m)-збіжністю і визначається умовою: $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(m)} x_0 \Leftrightarrow p_i(x_n - x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall i \in N$. Повні зчислені-нормовані простори будемо називати зчислено-банаховими.

Нехай цей простір X одночасно є і лінійною решіткою. Якщо ці дві структури узгоджені умовою монотонності $|x| \le |y| \Rightarrow p_i(x) \le p_i(y) \;\; \forall i \in N$, то X називається зчислено-нормованою решіткою, а повний – зчислено-банаховою решіткою. У термінології Б.З. Вулиха – відповідно KN^* - лінеал та KB^* - лінеал [1].

Якщо вихідна система півнорм не є монотонною, то можливість введення еквівалентної системи монотонних півнорм задається умовою теореми $VII.8.1$ [1]. Оскільки там ця теорема не доводиться, то розглянемо її детально.

<u>Теорема 1.</u> Нехай X – лінійна решітка і одночасно зчислено-нормований простір. В X можна ввести еквівалентну систему монотонних півнорм тоді і тільки тоді, коли вихідні півнорми узгоджені з порядком умовою: $p_i(x_n) \to 0 \ \forall i \in N$, $|y_n| \le |x_n| \ \forall n \in N \Rightarrow p_i(y_n) \to 0 \ \forall i \in N$.

Доведення. 1). Необхідність. Нехай всі вихідні півнорми є монотонними. Тоді при $|y_n| \le |x_n| \ \forall n \in N$ буде (з монотонності) $p_i(y_n) \le p_i(x_n) \ \forall i \in N$, отже, при $p_i(x_n) \to 0 \Rightarrow p_i(y_n) \to 0 \ \forall i \in N$ і умова теореми виконана.

2). Достатність. Нехай умова теореми виконана. Побудуємо на X нову систему півнорм $\left(p_i^*(x)\right)_{i \in N}$ за правилом: $p_i^*(x) = \sup\limits_{\theta \le y \le |x|} p_i(y)$ (θ – нульовий елемент простору). Покажемо, що всі потрібні властивості виконуються.

1. Коректність введення нових півнорм, тобто $0 \le p_i^*(x) < +\infty \ \forall x \in X \ \forall i \in N.$ Оскільки $p_i(y) \ge 0$, то і $p_i^*(x) \ge 0$. Покажемо, що $p_i^*(x) < +\infty \ \forall x \in X$. Нехай $\lambda_n \to 0 \Rightarrow \lambda_n x \to \theta$, оскільки $p_i(\lambda_n x) = |\lambda_n| p_i(x) \to 0$. Якщо $\theta \le y_n \le |x|$, то $p_i(\lambda_n y_n) \to 0$ з умови теореми. При заданому $x \in X$ множина $\{y : \theta \le y \le |x|\}$ обмежена по півнормам $\Rightarrow p_i^*(x) < +\infty$ для всіх $x \in X$.

2. Невід'ємність. $p_i^*(x) = \sup\limits_{\theta \le y \le |x|} p_i(y) \ge 0 \ \forall x \in X$.

3. Абсолютна однорідність.

$$p_i^*(\lambda x) = \sup_{\theta \le y \le |\lambda x|} p_i(y) = \sup_{\theta \le y \le |\lambda||x|} p_i(y) = |\lambda| \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y) = |\lambda| p_i^*(x).$$

4. Субаддитивність. Нехай $x = a + b$. $\theta \le y \le |x| \Rightarrow y = y_1 + y_2$, де $\theta \le y_1 \le |a|$, $\theta \le y_2 \le |b|$ по теоремі $3.6.2$ [1].

$$p_i(y) = p_i(y_1 + y_2) \le p_i(y_1) + p_i(y_2),$$ значить,

$$p_i^*(x) = \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y) \le \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y_1) +$$
$$+ \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y_2) = p_i^*(a) + p_i^*(b).$$

5. Монотонність. Нехай $|x| \le |z|$, тоді $p_i^*(x) = \sup\limits_{\theta \le y \le |x|} p_i(y) \le \sup\limits_{\theta \le y \le |z|} p_i(y) = p_i^*(z)$.

6. Еквівалентність старих і нових півнорм. З означення нових півнорм, $p_i^*(x) \ge p_i^*(x_+)$, $p_i^*(x) \ge p_i^*(x_-)$. Отже, $p_i^*(x) \le 2 p_i^*(x)$, $p_i^*(x_n) \to 0 \Rightarrow p_i(x_n) \to 0$.

Навпаки, нехай $p_i(x_n) \to 0$. Припустимо супротивне. Тоді $(x_n)_{n \in a}$ має підпослідовність $\left(x_{n_k}\right)_{k \in N} \ge \varepsilon_0 > 0$. $\forall k \in N \exists y_k : \theta \le y_k \le |x_{n_k}|$, $p_i(y_k) \ge \varepsilon_0$. Але з узгодження півнорм, $p_i(y_k) \to 0$. Протиріччя.

Теорему доведено.

В зчислено-нормованих решітках, оскільки вони архімедові [1] можна розглядати (r)-збіжність і зіркові по відношенню до неї. Отже, розглянемо співвідношення вихідної топологічної збіжності (τ) та конфінальної зіркової збіжності $(c*r)$.

<u>Теорема 2.</u> В зчислено-банаховій решітці $(\tau) \Rightarrow (c*r)$.

Доведення. Нехай $x_n \xrightarrow{(\tau)} \theta$. Візьмемо її довільну підпослідовність $(x_m)_{m\in N}$, а з неї виділимо таку підпослідовність $(x_k)_{k\in N}$, що $p_i(x_k) \le \dfrac{1}{k^3}$, для $i = 1,2,\dots,k$. Це завжди можливо. Розглянемо $p_i(k|x_k|) = kp_i(|x_k|) = kp_i(x_k) \le k \cdot \dfrac{1}{k^3} = \dfrac{1}{k^2}$, $i = 1,2,\dots,k$ при даному $i \in N$, оскільки $k \to +\infty$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|$ абсолютно збіжний, бо він мажорується власно збіжним числовим рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$. На повні локально опуклі простори легко переноситься з банахових просторів умова збіжності абсолютно збіжного ряду [2]. Таким чином, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|$ збіжний. Позначимо його суму: $u \in X$ $u \ge \theta$ [1]. Також $k|x_k| \le u$, $k \in N \Rightarrow |x_k| \le \dfrac{1}{k} u$. При достатньо великих $k \in N$, буде $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |x_k| \le \varepsilon u$. Це означає, що $x_k \xrightarrow{(r)} \theta$, отже $x_n \xrightarrow{(c*r)} \theta$.

Теорему доведено.

Звідси очевидно, випливає

<u>Теорема 3.</u> В зчислено-банаховій решітці, $\tau \ge \tau^{(c*r)}$.

Нехай тепер E_1 – зчислено-банахова решітка, E_0 – ТЛР і E_1 алгебраїчно вкладена в E_0. Нехай вкладення структурне: $\tau_1^{(c*r)} \ge \tau_{01}^{(c*r)}$.

<u>Теорема 4.</u> Якщо зчислено-банахова решітка E_1 структурно вкладена в топологічну лінійну решітку E_0, то це вкладення є топологічним.

Доведення. Порівняємо топології τ_1 і τ_{01}. В силу структурності вкладення і теореми 3, $\tau_1 \ge \tau_1^{(c*r)} \ge \tau_{01}^{(c*r)} \ge \tau_{01}$, маємо $\tau_1 \ge \tau_{01}$ і оператор вкладення неперервний в топологіях $\tau(E_1)$, $\tau(E_0)$.

Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств / Б.З. Вулих. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 408 с.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин // – М.: Наука, 1980. – 495 с.
3. Погребний В.Д. Одна теорема про топологічне вкладення // Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука, ч. II.– К.: 2016. – С. 147-150.

Анотація. Погребний В. Ще одна теорема про топологічне вкладення. У роботі продовжуються дослідження проблем топологічного вкладення важливих класів упорядкованих топологічних лінійних просторів – топологічних лінійних решіток. Розглядаються зчислено-нормовані повні лінійні решітки, умови можливості введення еквівалентної системи монотонних півнорм, вкладення зчислено-банахової решітки у топологічну лінійну решітку при умові наявності їх алгебраїчного вкладення.
Ключові слова: простір, порядок, вкладення, півнорма, решітка, монотонність, зчисленість, топологія, збіжність, еквівалентність.

Abstract. Pogrebnoy V. Another topological embedding theorem. The paper continued research problems topological embedding important classes of ordered linear topological spaces - topological linear arrays. We consider the computed normalized full-line lattice, provided the possibility of introducing an equivalent system pivnorm monotone, investment-computed Banach lattice of topological linear grating provided their presence algebraic investment.
Keywords: space, order attachment pivnorma, grill, monotony, zchyslenist, topology convergence, equivalence.

Страх Олександр
ст.викладач кафедри математики
Страх О.П.

ПОБУДОВА ФРАКТАЛЬНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ЛІНІЙ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ВХІДНИХ ДАНИХ

1. Вступ.
Класична теорія інтерполяції, зокрема за допомогою поліномів та сплайнів, відіграють важливу роль у підгонці й апроксимації гладких функцій для зображення експериментальних даних. Але поряд із цим, класична інтерполяція у більшості випадків не може ефективно використовуватися для опису зображуваних деякими природними явищами надтонких швидкоплинних структур. Одним з підходів, що зараз інтенсивно розвивається, для підгонки різнопланових даних та наближенні функцій є теорія апроксимацій фрактальними інтерполяційними функціями (ФІФ), розроблена ще у 1986 році [1]. В роботах Барнслі, Наваскес, Масопуста, Мазеля, та ін. [1–6] на основі запропонованої теорії був створений відповідний алгоритм побудови систем ітераційних функцій (СІФ), що могли використовуватися при апроксимації даних як гладкими так і негладкими наближеннями. Більш того, ФІФ мають більше переваг, ніж класичні інтерполяції щодо наближення чи підгонки функцій природного походження, які характеризуються деякою самоподібністю. На сьогодні є цілий ряд різноманітних аспектів у дослідженнях апроксимацій засобами побудови ФІФ, одним з яких є побудова багатовимірних фрактальних інтерполяційних функцій і, використовуючи умови неперервності, вченими були отримані різного типу фрактальні інтерполяційні лінії (ФІЛ). Фрактальні лінії та поверхні як геометричні образи ФІФ виявилися корисними в моделюванні ряду процесів, зокрема, в металургії, фізиці, геології, обробці зображень та комп’ютерній графіці.

Разом з тим в сучасних дослідженнях будь-яких динамічних процесів є тенденція до зростанням різноманіття і складності математичних моделей. Зокрема, з метою уніфікації неперервного та дискретного аналізів Стефаном Хільгером ще у 1988 була побудована теорія часових шкал. Запропонована теорія дає можливість досліджувати ті динамічні процеси, функціонування яких може бути описаним виключно неперервно-дискретними моделями, і, в більшості випадків, дозволяє вивчати різні ситуації, в яких вибір часу рішень впливає на самі рішення. Тому в даній статті розглядається можливість побудови ФІЛ для апроксимації даних з неперервно-дискретним параметром.

1. Фрактальні інтерполяційні лінії для апроксимації заданих на часовій шкалі функцій в одновимірному випадку.

Нехай $a = x^{(0)} < x^{(1)} < \ldots < x^{(N-1)} < x^{(N)} = b$ – дійсні числа, $1 < N \in \mathbb{N}$, що належать даному відрізку часової шкали $[a;b]_{\mathrm{T}} := [a;b] \cap \mathrm{T} \subset \mathbb{R}$, $\{(x^{(i)}; y^{(i)} \in [a;b]_{\mathrm{T}} \times \mathbb{R}\}$ – дана множина вузлів інтерполяції і для кожного $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ розглянемо афінне перетворення площини

$$G_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad G_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_i x + \beta_i \\ \gamma_i x + \delta_i y + \zeta_i \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \zeta_i \in \mathbb{R}$ при чому $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1$. Також вважатимемо, що для кожного $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ оператор G_i переводить відрізок $[(x^{(0)}; y^{(0)}); (x^{(N)}; y^{(N)})]_{\mathrm{T}}$ у відрізок, що з'єднує вузли інтерполяції $(x^{(i-1)}; y^{(i-1)})$ та $(x^{(i)}; y^{(i)})$, і для нього вимагатимемо виконання наступних умов:

$$G_i \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(i-1)} \\ y^{(i-1)} \end{pmatrix}, \quad G_i \begin{pmatrix} x^{(N)} \\ y^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тоді з вищевказаних умов (1) та (2) маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_i x^{(0)} + \beta_i = x^{(i-1)}, \\ \alpha_i x^{(N)} + \beta_i = x^{(i)}, \\ \gamma_i x^{(0)} + \delta_i y^{(0)} + \zeta_i = y^{(i-1)}, \\ \gamma_i x^{(N)} + \delta_i y^{(N)} + \zeta_i = y^{(i)}, \end{cases}$$

розв'язавши котру, отримуємо

$$\alpha_i = \frac{x^{(i)} - x^{(i-1)}}{b-a}, \ \beta_i = \frac{b x^{(i-1)} - a x^{(i)}}{b-a}, \ \gamma_i = \frac{y^{(i)} - y^{(i-1)} - \delta_i (y^{(N)} - y^{(0)})}{b-a}, \tag{3}$$

де числа $\delta_i \in \mathbb{R}$ розглядаються як параметри.

Нехай тепер (Ω, ρ) – простір компактних непорожніх підмножин множини точок площини з хаусдорфовою метрикою. Визначимо наступним чином оператор фрактального перетворення [4, 7]:

$$\mathsf{L}:\Omega\to\Omega,\quad \mathsf{L}(A)=\bigcup_{i=1}^{N}G_i(A),$$

де $G_i(A):=\{G_i(a):a\in A\}$. Тоді за умовами (2) оператор L переводитиме будь-яку rd-неперервну функцію, задану на даному відрізку часової шкали $[a;b]_{\mathrm{T}}$, в неперервну лінію, задану на відрізку $[a;b]$.

Тоді для довільної rd-неперервної на $[a;b]_{\mathrm{T}}$ функції $y=f(x)$ отримуємо наступне представлення оператора L:

$$\mathsf{L}[f](x)=\sum_{i=1}^{N}\left(\gamma_i\cdot\frac{t-\beta_i}{\alpha_i}+\zeta_i+\delta_i\cdot f\left(\frac{x-\beta_i}{\alpha_i}\right)\right)\cdot \mathrm{I}_{[x^{(i-1)};x^{(i)}]}(x),\tag{4}$$

де $\mathrm{I}_E(t)=\begin{cases}1, & t\in E,\\ 0, & t\notin E\end{cases}$.

Нехай $\delta_i:\square\to\square$ – деякий оператор, для якого виконується умова

$$\forall\ell\in\square\ \exists\kappa\in[0;1):\left|\delta_i\ell\right|\le\kappa\cdot\left|\ell\right|.\tag{5}$$

Тоді побудований за формулою (4) оператор L є стискаючим оператором, що діє в банаховому просторі $C_{\text{\rd}}([a;b]_{\mathrm{T}})$ rd-неперервних функцій з нормою $\|f(x)\|_\infty=\sup\limits_{x\in[a;b]_{\mathrm{T}}}\{|f(x)|\}$.

За теоремою про нерухому точку існує єдина функція $\tilde f(x)\in C_{\text{\rd}}([a;b]_{\mathrm{T}})$, яка задовольняє умови

$$\mathsf{L}[\tilde f](x)=\tilde f(x),\quad \forall f(x)\in C_{\text{\rd}}([a;b]_{\mathrm{T}}):\lim_{j=\infty}\left\|\mathsf{L}^j[f](x)-\tilde f(x)\right\|_\infty=0$$

Тому за наслідком з [3] функція $y=\tilde f(x)\in C[a;b]$ є фрактальною і визначатиме деяку лінію, яку називатимемо *фрактальною інтерполяційною лінією* (*ФІЛ*). Легко також бачити, що якщо $f\in C[a;b]_{\mathrm{T}}$, $f(x^{(0)})=y^{(0)}$, $f(x^{(N)})=y^{(N)}$, то $\mathsf{L}[f](x)$ буде проходити через задані вузли інтерполяції.

Тепер з'ясуємо питання про апроксимацію rd-неперервної функції $y=f(x)$ за допомогою ФІЛ $y=\tilde f(x)$ побудованої на вузлах інтерполяції $\left\{\begin{pmatrix}x^{(i)}\\ y^{(i)}\end{pmatrix}\right\}$, $i\in\{0,1,\ldots,N\}$.

Це означає, що нам потрібно вибрати числа δ_i так, щоб значення $|f(x)-\tilde f(x)|$ було мінімальним. Нехай $L_p([a,b]_{\mathrm{T}})$ – банаховий простір Δ-інтегровних на $[a,b]_{\mathrm{T}}$ функцій у степені p [8] з нормою $\|f\|=\left(\int_a^b|f(t)|^p\,\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}$, де $p\in[1,\infty)$. Тоді із (4) вигляду оператора L, з умови (5) та відповідних властивостей Δ-інтеграла [9] отримуємо:

$$\left\|\mathsf{L}[f_1](x)-\mathsf{L}[f_2](x)\right\|^p=\int_a^b\left|\mathsf{L}[f_1](x)-\mathsf{L}[f_2](x)\right|^p\Delta x=$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int\limits_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left|\delta_i (f_1 - f_2)(x)\right|^p \Delta x \le \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \kappa^p \int\limits_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left| f_1(x) - f_2(x)\right|^2 \Delta x = \kappa^p \left\| f_1 - f_2 \right\|^p ,$$

(6)

де $\kappa \in [0,1)$ – коефіцієнт стиску оператора δ_i.

Таким чином, оператор $\mathrm{L} : L_p([a,b]_{\mathrm{T}}) \to L_p([a,b]_{\mathrm{T}})$ є стискаючим оператором з нерухомою точкою $\tilde{f}(x)$. Розв’язання поставленої задачі значно полегшується, якщо використати наступний відомий результат [2].

Теорема 1. *Нехай* (X,d) *– досконалий метричний простір і* $T : X \to X$ *– деяке стискаюче відображення з коефіцієнтом стиску* $c \in [0;1)$ *та нерухомою точкою* x^*. *Тоді*

$$\forall x \in X, \quad d(x,x^*) \le \frac{d(x,T(x))}{1-c}.$$

Для кожного $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ введемо наступні позначення:

$$u^{(i)}(x) = \frac{\left(y^{(i)} - y^{(i-1)}\right)x + \left(x^{(i)} y^{(i-1)} - x^{(i-1)} y^{(i)}\right)}{x^{(i)} - x^{(i-1)}},$$

$$v^{(i)}(x) = \frac{\left(y^{(N)} - y^{(0)}\right)x + \left(x^{(i)} y^{(0)} - x^{(i-1)} y^{(N)}\right)}{x^{(i)} - x^{(i-1)}},$$

$$w_i(x) = \frac{(b-a)x + \left(x^{(i)} a - x^{(i-1)} b\right)}{x^{(i)} - x^{(i-1)}}.$$

(7)

Тоді із (7) оператор L (4) можна переписати у наступній формі

$$\mathrm{L}[f](x) = \sum_{i=1}^{N} \left(u^{(i)} + \delta_i \cdot \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right)\right) \cdot \mathrm{I}_{[x^{(i-1)};x^{(i)}]}(x).$$

(8)

Таким чином, нам потрібно мінімізувати функціонал:

$$\left\| f(x) - \mathrm{L}[f](x) \right\|^p = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left| f - u^{(i)} - \delta_i \cdot \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right)\right|^p \Delta x.$$

(9)

Теорема 2. *Поданий у* (9) *функціонал досягає свого найменшого значення тоді й тільки тоді*, *коли числа* $\delta_i \in \mathbb{R}$ *задовольняють наступні умови*:

$$\int\limits_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left(f - u^{(i)} - \delta_i f \circ w_i - v^{(i)} \right)^{p-1} \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right) \Delta x = 0,$$

$$\operatorname{sgn}\left(f - u^{(i)} - \delta_i f \circ w_i - v^{(i)} \right) \int\limits_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left(f - u^{(i)} - \delta_i f \circ w_i - v^{(i)} \right)^{p-2} \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right)^2 \Delta x > 0,$$

(10)

і для яких значення

$$\int\limits_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left| f - u^{(i)} - \delta_i f \circ w_i - v^{(i)} \right|^p \Delta x$$

(11)

буде найменшим.

Доведення. Нехай z_1, z_2 належать простору $L_p([a,b]_{\mathrm{T}})$. Розглянемо функціонал

$$\Upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Upsilon(\eta) = \int_a^b \left| z_1 - \eta \cdot z_2 \right|^p \Delta x.$$

Для даного функціонала знайдемо умову існування локального мінімуму. Отримуємо

$$d\Upsilon(\eta) = d\left(\int_a^b \left| z_1 - \eta \cdot z_2 \right|^p \Delta x \right) = p \operatorname{sgn}(\eta z_2 - z_1) \int_a^b \Big((z_1 - \eta z_2)^{p-1} z_2 d\eta \Big) \Delta x.$$

Тоді необхідною умовою існування екстремуму функціонала Υ є рівність

$$\int_a^b (z_1 - \eta z_2)^{p-1} z_2 \, \Delta x = 0 \qquad (12)$$

Оскільки

$$d^2\Upsilon(\eta) = \operatorname{sgn}(z_1 - \eta z_2)\, p(p-1) \int_a^b \Big((z_1 - \eta z_2)^{p-2} z_2^2 d\eta^2 \Big) \Delta x,$$

то функціонал Υ (11) матиме мінімум у тих значеннях η, що задовольняють умову (12) і для яких виконується нерівність

$$\operatorname{sgn}(z_1 - \eta z_2) \int_a^b \Big((z_1 - \eta z_2)^{p-2} z_2^2 \Big) \Delta x > 0. \qquad (13)$$

Нехай умови (12), (13) виконуються для значень $\eta = \eta_1, \eta = \eta_2, \ldots, \eta = \eta_k$. Тоді функціонал Υ (11) мінімізується у точці $\tilde{\eta} \in \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k\}$ такій, що

$$\int_a^b \left| z_1 - \tilde{\eta} \cdot z_2 \right|^p \Delta x = \min_{i=\overline{1,k}} \left\{ \int_a^b \left| z_1 - \eta_i \cdot z_2 \right|^p \Delta x \right\}.$$

Звідси випливає, що й функціонал (9)

$$\| f(x) - \mathsf{L}[f](x) \|^p = \sum_{i=1}^{N} \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left| f - u^{(i)} - \delta_i \cdot \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right) \right|^p \Delta x$$

досягає свого мінімального значення при заданих умовах теореми, що й треба було довести.

З отриманого результату випливатиме також відповідний наслідок для випадку $p = 2$

Наслідок. *Функціонал*

$$\| f(x) - \mathsf{L}[f](x) \|^2 = \sum_{i=1}^{N} \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left| f - u^{(i)} - \delta_i \cdot \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right) \right|^2 \Delta x,$$

що відповідає оператору фрактального перетворення (9) $\mathsf{L}[f](x) = \sum_{i=1}^{N} \Big(u^{(i)} + \delta_i \cdot \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right) \Big) \cdot \mathrm{I}_{[x^{(i-1)}; x^{(i)}]}(x)$, $\mathsf{L} : L_2([a,b]_{\mathrm{T}}) \to L_2([a,b]_{\mathrm{T}})$, досягає свого мінімуму тоді й тільки тоді, коли числа $\delta_i \in \mathbb{R}$ задовольняють наступні умови:

$$\delta_i = \left(\int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left(f - u^{(i)} \right) \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right) \Delta x \right) \cdot \left(\int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right)^2 \Delta x \right)^{-1}.$$

Зауваження. Насправді у формулюванні наслідку з теореми 1 необхідна умова $\int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \left(f \circ w_i - v^{(i)} \right)^2 \Delta x \neq 0$ буде виконуватись у випадку, коли $\forall i \in \{1,2,\ldots,N\} : x^{(i)} - x^{(i-1)} > \sigma\left(x^{(i-1)}\right)$, де $\sigma(x)$ – функція стрибка (по заданій часовій шкалі), що визначається наступним чином:

$$\sigma(x) := \inf\{s \in \mathrm{T} \mid s > x\}.$$

Приклад.

Розглянемо питання про апроксимацію функції $y = \sin x$, заданої на відрізку часової шкали $[0;\pi]_{\mathrm{T}} := \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left\{\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{5};\frac{2\pi}{3}\right\} \cup \left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$, на даних вузлах інтерполяції $x^{(0)} = 0$, $x^{(1)} = \frac{\pi}{6}$, $x^{(2)} = \frac{\pi}{2}$, $x^{(3)} = \frac{2\pi}{3}$, $x^{(4)} = \pi$.

Для кожного $i \in \{0,1,2,3,4\}$ виберемо значення $y^{(i)} = \sin\left(x^{(i)}\right)$, тобто $y^{(0)} = 0$, $y^{(1)} = \frac{1}{2}$, $y^{(2)} = 1$, $y^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y^{(4)} = 0$. Тоді знайшовши вигляд відповідних функцій (7) та підставивши їх в умови наслідку, за властивостями Δ-інтегрування [9] отримуємо:

$$\delta_1 = \frac{1}{35\pi}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4}, \quad \delta_3 = 1 - \frac{3\sqrt{3}+4}{10\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)}, \quad \delta_4 = \frac{(3\pi-8)\sqrt{3}}{4\pi^2},$$

звідки маємо наступний вигляд ФІЛ $y = f^*(x) \sim \mathsf{L}[\sin(x)]$:

$$f^*(x) = \begin{cases} 3x + \dfrac{\sin(6x)}{35\pi}, & \textit{при } x \in \left[0;\dfrac{\pi}{6}\right], \\ \dfrac{3x}{2\pi} + \dfrac{1-\cos(3x)(2\sqrt{3}+3)}{4}, & \text{при } x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right], \\ \dfrac{(3\sqrt{3}-6)x}{\pi} + 4 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sin(6x)\left(\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)} - 1\right), & \text{при } x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right], \\ \sqrt{3}\left(\dfrac{\sin(3x)(3\pi-8) - 3\pi x}{4\pi^2} + \dfrac{3}{2}\right), & \text{при } x \in \left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right], \end{cases}$$

Знайдена фрактальна апроксимація графічно зображена на рис. (1).

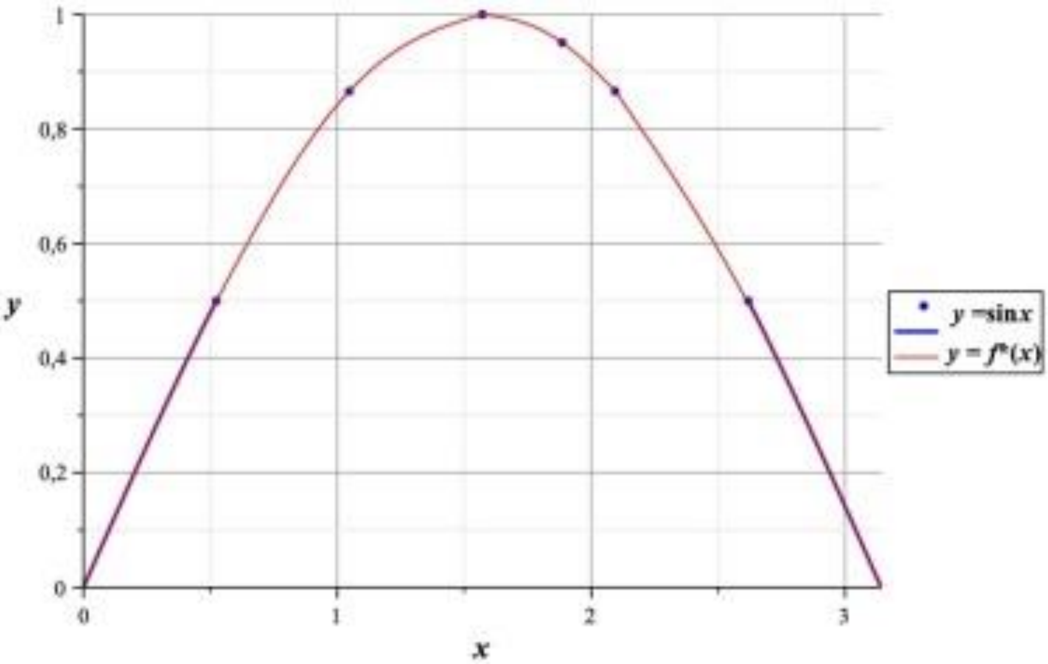


Рис. 1.

3. Просторова фрактальна апроксимація двовимірних функцій заданих на часовій шкалі

Нехай тепер $a = t^{(0)} < t^{(1)} < \ldots < t^{(N-1)} < t^{(N)} = b$ – дійсні числа, $1 < N \in \mathbb{N}$ з даного відрізка часової шкали $[a;b]_{\mathrm{T}}$ і $\{(t^{(i)}; x_1^{(i)}; x_2^{(i)}) \in [a;b]_{\mathrm{T}} \times \mathbb{R}^2\}$ – дана множина вузлів інтерполяції. Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ розглянемо гомеоморфізм

$$S_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

що визначається наступним чином:

$$S_i \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_i t + b_i \\ c_i t + a_i x_1 + b_i x_2 + k_i \\ d_i t + c_i x_1 + d_i x_2 + l_i \end{pmatrix}.$$

(14)

Надалі будемо припускати виконання умови $a_1 + a_2 + \ldots + a_N = 1$. Аналогічно одновимірному випадку для оператора S_i вимагатимемо виконання умов:

$$S_i \begin{pmatrix} t^{(0)} \\ x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{(i-1)} \\ x_1^{(i-1)} \\ x_2^{(i-1)} \end{pmatrix}, \quad S_i \begin{pmatrix} t^{(N)} \\ x_1^{(N)} \\ x_2^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{(i)} \\ x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix},$$

(15)

звідки маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_i t^{(0)} + b_i = t^{(i-1)}, \\ a_i t^{(N)} + b_i = t^{(i)}, \\ c_i t^{(0)} + a_i x_1^{(0)} + b_i x_2^{(0)} + k_i = x_1^{(i-1)}, \\ d_i t^{(0)} + c_i x_1^{(0)} + d_i x_2^{(0)} + l_i = x_2^{(i-1)}, \\ c_i t^{(N)} + a_i x_1^{(N)} + b_i x_2^{(N)} + k_i = x_1^{(i)}, \\ d_i t^{(N)} + c_i x_1^{(N)} + d_i x_2^{(N)} + l_i = x_2^{(i)}, \end{cases}$$

тобто отримуємо справедливі рівності:

$$a_i = \frac{t^{(i)} - t^{(i-1)}}{b-a},\ b_i = \frac{bt^{(i-1)} - at^{(i)}}{b-a},\ c_i = \frac{x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)} - a_i(x_1^{(N)} - x_1^{(0)}) - b_i(x_2^{(N)} - x_2^{(0)})}{b-a},$$
$$d_i = \frac{x_2^{(i)} - x_2^{(i-1)} - c_i(x_1^{(N)} - x_1^{(0)}) - d_i(x_2^{(N)} - x_2^{(0)})}{b-a}, \qquad (16)$$

де компоненти $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ розглядаються як параметри.

Нехай $(\tilde{\Omega}, \tilde{\rho})$ – простір компактних непорожніх підмножин множини точок простору $\mathbb{R}^3$ з хаусдорфовою метрикою $\tilde{\rho} : \underset{\forall A \subseteq \tilde{\Omega}, B \subseteq \tilde{\Omega}}{\tilde{\rho}(A,B)} = \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\}$, де $\rho(A,B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \rho(a,b)$. Визначимо наступним чином оператор Хатчінсона–Барнслі (оператор фрактального перетворення):

$$\mathsf{H} : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}, \quad \mathsf{H}(B) = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(B),$$

де $S_i(B) := \{S_i(b) : b \in B\}$. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ введемо наступні позначення:

$$p_i : [a;b]_{\mathrm{T}} \to [t^{(i-1)}; t^{(i)}], \quad p_i := a_i t + b_i,\ q_i : [a;b]_{\mathrm{T}} \to \mathbb{R},$$
$$q_i := c_i t + k_i, \quad r_i : [a;b]_{\mathrm{T}} \to \mathbb{R}, \quad r_i := d_i t + l_i$$

(17)

Тоді, підставивши замість x_1, x_2 в (16) $s_1(t), s_2(t)$, отримуємо наступне представлення оператора Хатчінсона--Барнслі H:

$$\mathsf{H}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}(t) = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} \left(q_i \circ p_i^{-1}\right)(t) + \left(a_i \cdot \left(s_1 \circ p_i^{-1}\right) + b_i \cdot \left(s_2 \circ p_i^{-1}\right)\right)(t) \\ \left(r_i \circ p_i^{-1}\right)(t) + \left(c_i \cdot \left(s_1 \circ p_i^{-1}\right) + d_i \cdot \left(s_2 \circ p_i^{-1}\right)\right)(t) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{I}_{[t^{(i-1)}; t^{(i)}]}(t).$$

(18)

Далі припутимо, що параметри $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ є компонентами деякого оператора, що діє у просторі $\mathbb{R}^2$, і нехай цей оператор задовольняє умову Ліпшица, тобто існує дійсне число $L \in [0;1)$ таке, що для довільної пари векторів $m = (m_1; m_2), n = (n_1; n_2)$ виконується наступна умова:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_i(n_1 - m_1) + b_i(n_2 - m_2) \\ c_i(n_1 - m_1) + d_i(n_2 - m_2) \end{pmatrix} \right\| \le L \cdot \left\| \begin{pmatrix} n_1 - m_1 \\ n_2 - m_2 \end{pmatrix} \right\|.$$

(19)

Тоді побудований за формулою (18) оператор H є стискаючим (з коефіцієнтом стиску

L) оператором, що діє в банаховому просторі $((C[a;b]_{\mathrm{T}}\times C[a;b]_{\mathrm{T}}), \|\cdot\|_{\infty})$ з відповідною нормою

$$\left\|\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}\right\|_{\infty} = \sup_{t\in[a;b]_{\mathrm{T}}} \left\{\left\|\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}\right\|\right\}.$$

За теоремою про нерухому точку існує єдина двовимірна функція $\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix} \in (C[a;b]_{\mathrm{T}}\times C[a;b]_{\mathrm{T}})$ така, що $\mathrm{H}\begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix}$ і для довільної функції $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in (C[a;b]\times C[a;b])$ виконується умова $\lim\limits_{j=\infty}\left\|\mathrm{H}^j\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix}\right\|_{\infty} = 0$. Функція $\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix} \in (C[a;b]_{\mathrm{T}}\times C[a;b]_{\mathrm{T}})$ визначатиме деяку просторову лінію $[t,\tilde{s}_1(t),\tilde{s}_2(t)]$ – просторову ФІЛ. Також, якщо $[s_1,s_2]\in(C[a;b]_{\mathrm{T}}\times C[a;b]_{\mathrm{T}})$, $s_1(t^{(0)}) = x_1^{(0)}$, $s_2(t^{(0)}) = x_2^{(0)}$, $s_1(t^{(N)}) = x_1^{(N)}$ і $s_2(t^{(N)}) = x_2^{(N)}$, $\mathrm{H}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ буде проходити через задані вузли інтерполяції, причому лінію $\mathrm{H}^j\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ будемо називати *дофрактальною інтерполяційною лінією* j-го *порядку*.

Аналогічно постає питання про можливість апроксимації rd-неперервної функції $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ за допомогою ФІЛ $[t,\tilde{s}_1(t),\tilde{s}_2(t)]$ побудованої на вузлах інтерполяції $\left\{\begin{pmatrix} t^{(i)} \\ x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix}\right\}$, $i\in\{0,1,\ldots,N\}$. Для його вирішення нам потрібно вибрати параметри $a_i,b_i,c_i,d_i \in \mathbb{R}$ як коефіцієнти деякого стискаючого відображення з коефіцієнтом стиску $L\in[0;1)$ так, щоб відстань між $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix}$ була найменшою. Надалі скористаємося модифікацією розвинених в роботах [1, 10] методів фрактальної апроксимації. Нехай $L_p([a,b]_{\mathrm{T}})$ – банаховий простір Δ-інтегровних у степені p функцій ($p\geq 1$) на заданому відрізку часової шкали $[a,b]_{\mathrm{T}}$ з нормою

$$\left\|\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\right\| = \left(\int_a^b \left(f_1^2(t) + f_2^2(t)\right)^{\frac{p}{2}} \Delta t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тоді із (18) та (19) отримуємо:

$$\left\|\mathrm{H}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} - \mathrm{H}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}\right\|^p = \int_a^b \left|\mathrm{H}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} - \mathrm{H}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}\right|^p \Delta t = \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{t^{(i-1)}}^{t^{(i)}} \left|\begin{pmatrix} a_i(s_1-f_1)+b_i(s_2-f_2) \\ c_i(s_1-f_1)+d_i(s_2-f_2) \end{pmatrix}(t)\right|^p \Delta t \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} a_i L^p \int_{t^{(i-1)}}^{t^{(i)}} \left| \begin{pmatrix} s_1 - f_1 \\ s_2 - f_2 \end{pmatrix}(t) \right|^p \Delta t = L^p \left\| \begin{pmatrix} s_1 - f_1 \\ s_2 - f_2 \end{pmatrix} \right\|^p .$$

(20)

Таким чином, оператор $\mathsf{H}: L_p([a,b]_{\mathrm{T}}) \to L_p([a,b]_{\mathrm{T}})$ є стискаючим оператором з нерухомою точкою $[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]$. Знову для спрощення ми мінімізуватимемо значення $\left\| \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} - \mathsf{H}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \right\|$. Для цього для кожного $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ введемо наступні позначення:

$$u_{1,2}^{(i)}(t) = \frac{\left(x_{1,2}^{(i)} - x_{1,2}^{(i-1)}\right)t + \left(t^{(i)} x_{1,2}^{(i-1)} - t^{(i-1)} x_{1,2}^{(i)}\right)}{t^{(i)} - t^{(i-1)}},\ v_{1,2}^{(i)}(t) = \frac{\left(x_{1,2}^{(N)} - x_{1,2}^{(0)}\right)t + \left(t^{(i)} x_{1,2}^{(0)} - t^{(i-1)} x_{1,2}^{(N)}\right)}{t^{(i)} - t^{(i-1)}},$$

$$w^{(i)}(t) = \frac{(b-a)t + \left(t^{(i)}a - t^{(i-1)}b\right)}{t^{(i)} - t^{(i-1)}}$$

(21)

Тоді оператор H можна переписати у наступній формі

$$\mathsf{H}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}(t) = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} \left(u_1^{(i)} + a_i \cdot \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) + b_i \cdot \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\right)(t) \\ \left(u_2^{(i)} + c_i \cdot \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) + d_i \cdot \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\right)(t) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{I}_{[t^{(i-1)}; t^{(i)}]}(t).$$

(22)

Таким чином, нам потрібно мінімізувати функціонал:

$$\left\| \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} - \mathsf{H}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \right\|^{2p} = \sum_{i=1}^{N} \int_{t^{(i-1)}}^{t^{(i)}} \left(\left(s_1 - u_1^{(i)} - a_i \cdot \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) - b_i \cdot \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(s_2 - u_2^{(i)} - c_i \cdot \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) - d_i \cdot \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\right)^2 \right)^p \Delta t.$$

(23)

Теорема 3. *Функціонал, поданий в* (23), *досягає свого мінімуму, якщо коефіцієнти* $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ *задовольняють наступну систему рівнянь:*

$$\int_{t^{(i-1)}}^{t^{(i)}} \left(\left(s_1 - u_1^{(i)} - a_i \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) - b_i \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\right)^2 + \left(s_2 - u_2^{(i)} - c_i \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - d_i \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\right)^2 \right)^{p-1} \left(a_i \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) + b_i \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right) - s_1 - u_1^{(i)}\right)\left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right)\Delta t = 0,$$

$$\int_{t^{(i-1)}}^{t^{(i)}} \left(\left(s_1 - u_1^{(i)} - a_i \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) - b_i \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\right)^2 + \left(s_2 - u_2^{(i)} - c_i \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - d_i \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\right)^2 \right)^{p-1} \left(a_i \left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) + b_i \left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right) - s_1 - u_1^{(i)}\right)\left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\Delta t = 0,$$

$$\int\limits_{t^{(i-1)}}^{t^{(i)}} \Big(\Big(s_1 - u_1^{(i)} - a_i\left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) - b_i\left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\Big)^2 + \Big(s_2 - u_2^{(i)} - c_i\left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) -$$
$$- d_i\left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\Big)^2\Big)^{p-1} \Big(c_i\left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) + d_i\left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right) - s_2 - u_2^{(i)}\Big)\Big(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\Big)\Delta t = 0,$$

$$\int\limits_{t^{(i-1)}}^{t^{(i)}} \Big(\Big(s_1 - u_1^{(i)} - a_i\left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) - b_i\left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\Big)^2 + \Big(s_2 - u_2^{(i)} - c_i\left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) -$$
$$- d_i\left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right)\Big)^2\Big)^{p-1} \Big(c_i\left(s_1 \circ w^{(i)} - v_1^{(i)}\right) + d_i\left(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\right) - s_2 - u_2^{(i)}\Big)\Big(s_2 \circ w^{(i)} - v_2^{(i)}\Big)\Delta t = 0.$$

Доведення. Нехай $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ належать простору $L_p([a,b]_{\mathrm{T}})$. Тоді для $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ розглянемо функціонал $\Lambda : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$

$$\Lambda(M) = \int\limits_a^b \left|g - M \cdot h\right|^{2p} \Delta t = \int\limits_a^b \Big((g_1 - m_1 h_1 - m_2 h_2)^2 + (g_2 - m_3 h_1 - m_4 h_2)^2\Big)^p \Delta t, \quad (24)$$

для якого визначимо умови існування мінімуму. Для цього знайдемо диференціал оператора $\Lambda(M)$:

$$d\Lambda(M) = d\left(\int\limits_a^b \Big((g_1 - m_1 h_1 - m_2 h_2)^2 + (g_2 - m_3 h_1 - m_4 h_2)^2\Big)^p \Delta t\right) =$$
$$= 2p\int\limits_a^b \Big((g_1 - m_1 h_1 - m_2 h_2)^2 + (g_2 - m_3 h_1 - m_4 h_2)^2\Big)^{p-1} \Big((m_1 h_1 +$$
$$+ m_2 h_2 - g_1)(h_1 dm_1 + h_2 dm_2) + (m_3 h_1 + m_4 h_2 - g_2)(h_1 dm_3 + h_2 dm_4)\Big)\Delta t.$$

Увівши позначення $Q(M,t) := (g_1 - m_1 h_1 - m_2)^2 + (g_2 - m_3 h_1 - m_4 h_2)^2$, отримуємо, що для відшукання коефіцієнтів матриці M, при яких розглядуваний функціонал має екстремум, необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\int\limits_a^b Q^{p-1}(M,t)(m_1 h_1 + m_2 h_2 - g_1) h_{1,2} \Delta t = 0,$$
$$\int\limits_a^b Q^{p-1}(M,t)(m_3 h_1 + m_4 h_2 - g_2) h_{1,2} \Delta t = 0,$$

(25)

Знайдемо другий диференціал $d^2\Lambda$ функціонала Λ:

$$d^2\Lambda(M) = 2p\int_a^b \Big((p-1)Q^{p-2}(M,t)\big((m_1h_1 + m_2h_2 - g_1)(h_1dm_1 + h_2dm_2) +$$

$$+(m_3h_1 + m_4h_2 - g_2)(h_1dm_3 + h_2dm_4)\big)^2 + Q^{p-1}(M,t)\big((h_1dm_1 + h_2dm_2)^2 +$$

$$+(h_1dm_3 + h_2dm_4)^2 + (m_1h_1 + m_2h_2 - g_1)(h_1dm_1^2 + h_2dm_2^2)\big(m_3h_1 + m_4h_2 -$$

$$-g_2\big)(h_1dm_3^2 + h_2dm_4^2)\big)\Big)\Delta t.$$

Нехай $m_1 = m_1, m_2 = m_2, m_3 = m_3, m_4 = m_4$ розв'язки системи (25), для яких виконується умова $d^2\Lambda > 0$. Це означає, що при цих значеннях коефіцієнтів матриці M, функціонал Λ має абсолютний мінімум. Звідси випливає, що й функціонал (23) досягає мінімуму при заданих умовах теореми. Теорему доведено.

Слід також зазначити, що з теореми 2 отримуються відповідні результати для суто неперервного $\mathrm{T} = \square$ чи суто дискретного $\mathrm{T} = \square$ випадків.

Приклад 2. Розглянемо питання про апроксимацію функції $F(t) := \begin{pmatrix} 2^t \\ t^2 \end{pmatrix}$, де змінна t належить заданому відрізку часової шкали $[0;4]_{\mathrm{T}} := \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1,\ 2, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4\right\}$, на даних вузлах інтерполяції $t^{(0)} = 0$, $t^{(1)} = \frac{2}{5}$, $t^{(2)} = \frac{4}{5}$, $t^{(3)} = 2$, $t^{(4)} = \frac{10}{3}$, $t^{(5)} = 4$.

Для кожного $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ виберемо значення $x_1^{(i)} = 2^{t^{(i)}}$, $x_2^{(i)} = \left(t^{(i)}\right)^2$, тобто $x_1^{(0)} = 1$, $x_1^{(1)} = 2^{\frac{2}{5}}$, $x_1^{(2)} = 2^{\frac{4}{5}}$, $x_1^{(3)} = 4$, $x_1^{(4)} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$, $x_1^{(5)} = 16$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_2^{(1)} = \frac{4}{25}$, $x_2^{(2)} = \frac{16}{25}$, $x_2^{(3)} = 4$, $x_2^{(4)} = \frac{100}{9}$, $x_2^{(5)} = 16$. Тоді знайшовши вигляд відповідних функцій (21) та підставивши їх в умови теореми 2, за властивостями Δ-інтегрування [9] отримуємо:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8}2^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{4}2^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{100} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8}2^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{4}2^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{8}2^{\frac{4}{5}} \\ 0 & \frac{1}{100} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8}2^{\frac{4}{5}} - \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{9}{100} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Тоді, розглядаючи проекції функції $F(t)$ та відповідної їй ФІЛ $F'(t)$ на площину Ox_1x_2, отримуємо:

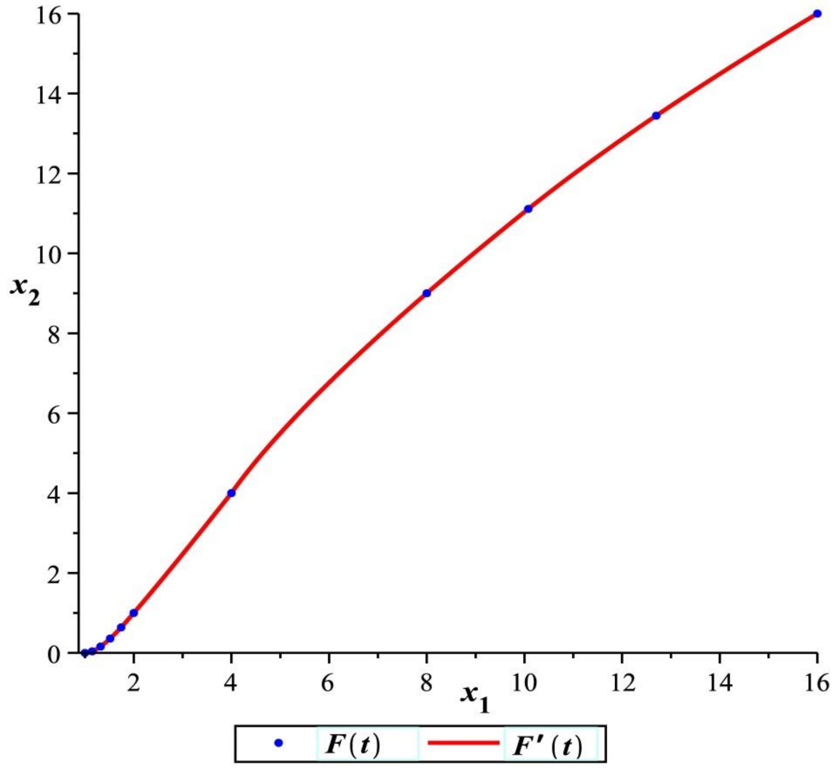


Рис. 2.

У завершенні потрібно зауважити також, що особливий інтерес у запропонованому апараті побудови фрактальних інтерполяційних ліній становить можливість апроксимації атракторів динамічних рівнянь та їх систем, що описують реальні процеси, зокрема для випадку часових шкал фрактальної структури.

Список використаних джерел

1. Barnsley M. F. Fractal Image Compression / M. F. Barnsley and L. P. Hurd – A. K. Peters, Wellesley, Mass, USA, 1993.
2. Barnsley M. F. A fractal valued random iteration algorithm and fractal hierarchy / M. F. Barnsley, J. E. Hutchinson and O. Stenflo // Fractals, vol. 13(2), pp. 111–146, 2005.
3. Barnsley M. F. Hidden variable fractal interpolation functions / M. F. Barnsley, J. Elton, D. Hardin, P. Massopust // SIAM J. Math. Anal., vol. 20, pp. 1218–1242, 1989.
4. Massopust P. Interpolation and Approximation with Splines and Fractals / P. Massopust, – Oxford University Press, 2010.
5. Navascues M. A. Fitting Fractal Surfaces on Non-Rectangular Grids / M. A. Navascues, M. V. Sebastian // Fractals, Vol. 16, No. 2, pp. 151–158, 2008.
6. Ruan H. Box dimension and fractional integral of linear fractal interpolation functions / H. Ruan, W. Su and K. Yao // Journal of Approximation Theory, vol. 161, pp. 187–197, 2009.
7. Kapoor G. P. Super Fractal Interpolation Functions / G. P. Kapoor and S. A. Prasad, 2012.
8. Ruffing A. Corresponding Banach spaces on time scales / A. Ruffing, M. Simon // Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 179, pp. 313–326, 2005.
9. Bohner M. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications / M. Bohner, A. Peterson – Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2001.
10. Viswanathan P. Fractal perturbation preserving fundamental shapes: Bounds on the scale factors / P. Viswanathan, A.K.B. Chand, M. A. Navascues // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014.

Анотація
Розглянуто питання про побудову фрактальних інтерполяційних ліній (ФІЛ) для апроксимації вхідних даних. Отримано вигляди операторів фрактального перетворення. Знайдено умови мінімізації відповідних функціоналів наближення.
Ключові слова: оператор фрактального перетворення, апроксимація, rd-неперервні функції

Abstract
We considered the problem of structure of the data approximation by the fractal interpolation curves (FIC). Fractal transform operator, which determines the FIF, is received. The conditions to minimize the corresponding functional approaches are found.
Key words: fractal transform operator, approximation, rd-continuous functions

Чкана Ярослав
старший викладач кафедри математики
chkana_76@ukr.net

ПРО ОДИН ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Задачі на доведення нерівностей є самими складними та цікавими з традиційних задач на нерівності. Процес доведення вимагає від дослідника винахідливості, творчості, що і робить математику тим предметом, який захоплює уяву. Навчання доведенням відіграє велику роль у розвитку дедуктивно-математичного мислення та загальних розумових здібностей студентів і навчити їх можна лише розглядаючи різні прийоми та методи доведень.

Методи, які застосовуються для доведення нерівностей так само різноманітні, як і самі нерівності. Загальні методи дуже часто приводять до некрасивих викладок,. І великим досягненням можна вважати знаходження кращого розв’язування, що потребує залучення спеціальних або штучних методів.

В статті буде розглянуто один загальний метод доведення як загальновідомих, так і інших нерівностей, який базується на використанні спеціальних властивостей функцій.

Теорема. *Нехай M - деяка числова множина; $f_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ - функції, визначені на M ; $F(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, $x \in M$ і кожна з функцій $f_i(x)$ та $F(x)$ досягає на M свого найменшого чи найбільшого значення тільки в одній точці. Тоді відповідно справедливі нерівності*

$$\min_{x\in M} F(x) \geq \sum_{i=1}^{n} \min_{x\in M} f_i(x), \qquad (1)$$

$$\max_{x\in M} F(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in M} f_i(x). \qquad (2)$$

Рівності виконуються тоді і тільки тоді, коли точки екстремумів функцій f_i *та* F *співпадають.* [3]

Приклад 1. Довести, що $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

Нехай $f_i(x) = a_i x,\ x \in [-1;1],\ a_i \in R,\ a_i \ne 0,\ i = \overline{1,n}$. Очевидно, що $\max\limits_{x\in[-1;1]} f_i(x) = |a_i| = \begin{cases} f(1),\ a_i > 0, \\ f(-1),\ a_i < 0 \end{cases}$ і для функції $F(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x$ отримаємо $\max\limits_{x\in[-1;1]} F(x) = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|$. За наведеною теоремою нерівність $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ є справедливою.

Приклад 2. Розглянемо функції $f_i(x) = a_i x^2 + 2b_i x,\ x \in R,\ a_i > 0,\ b_i \in R,\ i = \overline{1,n}$, для яких $\min\limits_{x\in R} f_i(x) = f\left(-\frac{b_i}{a_i}\right) = -\frac{b_i^2}{a_i}$ і $\min\limits_{x\in R} F(x) = F\left(-\frac{b_1 + \ldots + b_n}{a_1 + \ldots + a_n}\right) = -\frac{(b_1 + \ldots + b_n)^2}{a_1 + \ldots + a_n}$. Тоді за співвідношенням (1) отримаємо нерівність $-\frac{(b_1 + \ldots + b_n)^2}{a_1 + \ldots + a_n} \ge -\frac{b_1^2}{a_1} - \frac{b_1^2}{a_2} - \ldots - \frac{b_n^2}{a_n}$ або

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_1^2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n^2}{a_n} \ge \frac{(b_1 + \ldots + b_n)^2}{a_1 + \ldots + a_n}. \tag{3}$$

З цієї нерівності як наслідки можна отримати відомі співвідношення між середніми величинами та класичні нерівності:

1) покладемо $a_1 = c_1^2, \ldots, a_n = c_n^2,\ b_1 = c_1 d_1, \ldots, b_n = c_n d_n$, будемо мати

$$\frac{c_1^2 d_1^2}{c_1^2} + \frac{c_2^2 d_2^2}{c_2^2} + \ldots + \frac{c_n^2 d_n^2}{c_n^2} \ge \frac{(c_1 d_1 + \ldots + c_n d_n)^2}{c_1^2 + \ldots + c_n^2}$$

або

$$c_1 d_1 + \ldots + c_n d_n \le \sqrt{(c_1^2 + \ldots + c_n^2)(d_1^2 + \ldots + d_n^2)}\ -$$

нерівність Коші-Буняковського;

2) нехай в (3) $b_1 = \ldots = b_n = 1$, тоді $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \ge \frac{n^2}{a_1 + \ldots + a_n}$ або

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Це є відома нерівність між середнім арифметичним та середнім гармонічним $A_n \ge H_n$;

3) покладемо в (3) $a_1 = \ldots = a_n = 1$, отримаємо $b_1^2 + \ldots + b_n^2 \ge \frac{(b_1 + \ldots + b_n)^2}{n}$, звідси

$$\sqrt{\frac{b_1^2 + \ldots + b_n^2}{n}} \ge \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}$$

або $K_n \ge A_n$, де K_n, A_n – середні квадратичне і арифметичне відповідно.

4) використовуючи нерівність (3), доведемо нерівність $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$, де a, b, c – додатні дійсні числа.

Для цього подамо ліву частину у вигляді

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}$$

і застосуємо (3):

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)}=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)}{2(ab+bc+ac)}\ge$$
$$\ge\frac{ab+bc+ac+2(ab+bc+ac)}{2(ab+bc+ac)}=\frac{3}{2}.$$

Зауважимо, що знаходження мінімуму функції в наступному прикладі значно спростить використання похідної.

Приклад 3. Розглянемо функції $f_i(x)=a_ie^x-b_ix-b_i,\ x\in R,\ a_i>0,\ b_i>0,\ i=\overline{1,n}$.

Маємо, що $\min\limits_{x\in R} f_i(x)=f_i\left(\ln\frac{b_i}{a_i}\right)=-b_i\ln\frac{b_i}{a_i}$ і відповідно $\min\limits_{x\in R} F(x)=-(b_1+...+b_n)\ln\frac{b_1+...+b_n}{a_1+...+a_n}$. За (1) справедливим є співвідношення

$$b_1\ln\frac{b_1}{a_1}+...+b_n\ln\frac{b_n}{a_n}\ge(b_1+...+b_n)\ln\frac{b_1+...+b_n}{a_1+...+a_n}$$

або

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1}\cdot\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{b_2}\cdot...\cdot\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n}\ge\left(\frac{b_1+...+b_n}{a_1+...+a_n}\right)^{b_1+...+b_n}. \qquad (4)$$

Зокрема при $a_1=...=a_n=1$ отримаємо нерівність

$$b_1^{b_1}\cdot b_2^{b_2}\cdot...\cdot b_n^{b_n}\ge\left(\frac{b_1+...+b_n}{n}\right)^{b_1+...+b_n},$$

яка є досить цікавою сама по собі.

Якщо в (4) покласти $b_1=...=b_n=1$, то, виконавши відповідні перетворення, прийдемо до відомої нерівності між середнім геометричним та середнім арифметичним $\frac{a_1+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ або $A_n\ge G_n$.

І, нарешті, покладемо в (4) $b_1+...+b_n=1$, $c_1=\frac{a_1}{b_1}$,..., $c_n=\frac{a_n}{b_n}$, тоді

$$\left(\frac{1}{c_1}\right)^{b_1}\left(\frac{1}{c_2}\right)^{b_2}...\left(\frac{1}{c_n}\right)^{b_n}\ge\frac{1}{b_1c_1+...+b_nc_n}$$

або

$$b_1c_1+...+b_nc_n\ge c_1^{b_1}c_2^{b_2}....c_n^{b_n}. \qquad (5)$$

При $b_i=\frac{1}{n}$ знову отримаємо нерівність між середнім геометричним та середнім арифметичним.

Даний метод розповсюджується і на функції двох або більшої кількості змінних, а відповідний екстремум можна шукати в довільній зручній замкненій області простору R^n.

Приклад 4. Розглянемо функції $f_i(x,y)=a_ix+b_iy$, $i=\overline{1,n}$ в області $D=\{(x;y):\ x^2+y^2=1\}$. Очевидно, що екстремальних значень ці функції набувають на межі області D, тобто в точках кола $x^2+y^2=1$, і $\min\limits_D f_i(x;y)=\sqrt{a_i^2+b_i^2}$, $i=\overline{1,n}$, $\min\limits_D F(x;y)=\sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}$. Підстановка цих значень в (1) призведе до такої нерівності:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geq\sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}\,.$$

Приклад 5. Нехай функції $f_i(x,y)=a_ix+b_iy$, $i=\overline{1,n}$ задані в області $D=\left\{(x;y):\ x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}}=1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right\}$. Скориставшись нерівністю (5), знайдемо мінімальні значення цих функцій у вказаній області:

$$a_ix+b_iy=\frac{1}{p}\cdot pa_ix+\frac{1}{q}\cdot qb_iy\geq(pa_ix)^{\frac{1}{p}}\cdot(qb_iy)^{\frac{1}{q}}=(pa_i)^{\frac{1}{p}}\cdot(qb_i)^{\frac{1}{q}}$$

і

$$\min_D(a_ix+b_iy)=(pa_i)^{\frac{1}{p}}\cdot(qb_i)^{\frac{1}{q}},\ i=\overline{1,n}\,.$$

Покладемо $a=\dfrac{c^p}{p}$, $b=\dfrac{d^q}{q}$, тоді $\min\limits_D f_i(x,y)=c_id_i$, $i=\overline{1,n}$, і

$$\min_D F(x,y)=p^{\frac{1}{p}}(a_1+\ldots+a_n)^{\frac{1}{p}}\cdot q^{\frac{1}{q}}(b_1+\ldots+b_n)^{\frac{1}{q}}=\left(c_1^p+\ldots+c_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q+\ldots+b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отже, з (1) випливає відома нерівність Гельдера:

$$c_1d_1+\ldots+c_nd_n\leq\left(c_1^p+\ldots+c_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q+\ldots+b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Список використаних джерел

1. Р.П. Ушаков. О едином подходе к доказательству классических неравенств // Математика сегодня, вып. 10, 1995. – С. 61-66.

2. Р. Алексеев, Л. Курляндчик. Сумма минимумов и минимум суммы // Квант, №3, 1991. – С. 49-51, 55.

Анотація. Чкана Я. Про один загальний метод доведення нерівностей. Задачі на доведення нерівностей займають важливе місце при підготовці висококваліфікованого вчителя математики. В статті наведено один загальний метод, який дозволяє довести низку відомих нерівностей між середніми та інших цікавих нерівностей, використовуючи набір функцій, які мають лише один мінімум або максимум на деякій множині.

Ключові слова: нерівність, доведення, мінімум, максимум.

Abstract. Chkana Ya. On a general method for proving inequalities. Problems in proving inequalities play an important role in the preparation of highly qualified teachers of mathematics. This article provides a general method that can bring a number of known inequalities between average and other interesting inequalities using a set of functions that have only a minimum or maximum on a set.

Keywords: inequality, proving, minimum, maximum.

Володимир Шамоня
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри інформатики
Ольга Удовиченко
викладач кафедри інформатики
udovich_olga@fizmatsspu.sumy.ua
Артем Юрченко
викладач кафедри інформатики
a.yurchenko@fizmatsspu.sumy.ua

ПРО КОМП'ЮТЕРНУ ГРАФІКУ ЯК ІНСТРУМЕНТ НАВЧАННЯ І ПРОФЕСІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ

Сучасні вимоги, що пред'являються суспільством до випускника вишу, обумовлюють необхідність посилення підготовки у галузі комп'ютерної графіки, яка наразі є однією з найбільш потужних комп'ютерних технологій. Займаючи все більш міцні позиції, вона знаходить застосування не тільки в комп'ютерному світі, але і в різних сферах людської діяльності: наукових дослідженнях (візуалізація будови речовини, векторних полів, даних про кліматичні зміни за тривалий період і т.д.), медицині (комп'ютерна томографія), дослідно-конструкторських розробках тощо.

Уміння використовувати комп'ютерну графіку є необхідним для педагога будь-якої спеціальності. Це і підготовка дидактичного матеріалу, і оформлення статті, наукової роботи, сайту в Інтернет або електронного підручника, і вміння створювати на екрані комп'ютера мультимедійні презентації або навчальні flash-ролики, і оформлення класу, стендів, навчальних посібників, ілюстрації до тем, які вивчаються тощо.

При цьому важливі вміння упорядкування, систематизації, структурування графічної інформації, розуміння сутності інформаційного моделювання, способів представлення графічних даних і знань [1-5]. Саме тому нами при підготовці вчителя фізико-математичного та природничого профілів використовуються стендові матеріали, посібники, методичні рекомендації, які побудовані на використанні пізнавальної графіки, створеної засобами комп'ютерної графіки.

На рис. 1 наведено дидактичний і супровідний до нього матеріал, який використовується при вивченні теми «Формалізація графічних даних». Подані схеми, таблиці, позначення коментуються наступною текстовою частиною:

«Ідея формалізації графічних даних полягає в тому, що будь-яке зображення може бути дискретизоване за координатою, а кожен елемент із вже дискретизованого зображення має бути описаний ще і за кольорами. Причому розбиття як за координатою, так і за кольорами має враховувати особливість нашого органу сприйняття графічної інформації, тобто нашого ока.

Око – досить складний орган людського організму. Він являє собою оптичну систему, основним елементом якої є кришталик, що формує зображення на сітківці. Сітківка вистилає дно очного яблука і складається із паличок і колбочок, котрі розташовані вельми нерівномірно.

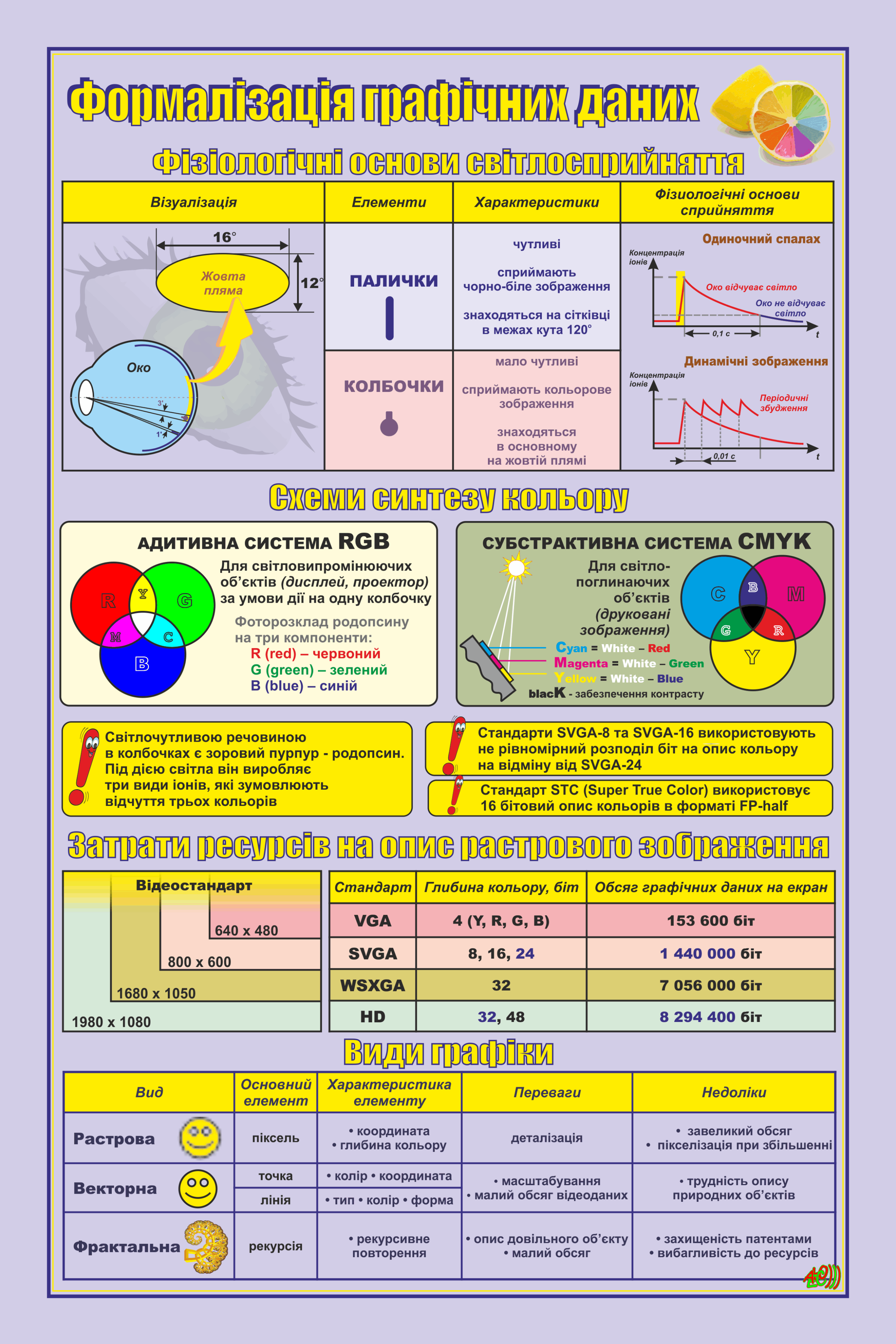


Рис. 1. Наочний супровід теми «Формалізація графічних даних»

Палички, які сприймають в основному чорно-біле зображення, є дуже чутливими і розташовані у межах тілесного кута 120° відносно оптичної осі ока. Колбочки є менш чутливими до світла, але здатні сприймати кольори. Коли на одну колбочку попадають світлові промені із різною довжиною хвилі, ми відчуваємо не окремі кольори, червоний, зелений або синій, а їх суміш.

Чутливість ока до кольору світла зумовлює зоровий пурпур родопсин, який під дією світла трьох основних кольорів (червоного, зеленого та синього) здатний розкладатися на заряджені фрагменти, котрі викликають в світлочутливих закінченнях нервової системи відчуття різного кольору. Світлове відчуття існує в нашому оці певний час до тих пір, поки не відбувається рекомбінація іонів, розкладених світлом. Така часова затримка зорового відчуття є основною для сприйняття рухомих зображень, побудованих на відтворенні майже схожих картинок через короткі проміжки часу.

Технічні пристрої, які формують колір, прийнято розділяти на пристрої адитивного і субстрактивного формування кольорів. У пристроїв першого типу світло випромінюється (дисплеї або проектори), пристрої (правильніше сказати, носії) другого типу працюють на відбиванні кольорів – в світловому промені при відбитті від поверхні фарба поглинає певні кольори, і в око попадає світло, утворене «відніманням» кольору поглинання фарби від білого кольору. Така система (CMYK) є субстрактивною.

Історично екран дисплея пройшов розвиток від стандарту VGA (640×480 точок) до сучасного стандарту HD (1920×1080 точок). Стандарти враховують як роздільну здатність, так і глибину кольору. В стандарті VGA кожен колір (Red, Green, Blue) описувався одним бітом, крім того один біт характеризував яскравість. Стандарт HD використовує наразі 32-бітове, а в перспективі 48-бітове кодування кожного кольору. В стандарті SVGA було запропоновано нерівномірний розподіл біт на опис кожного кольору в пікселі. Так, на опис синього кольору було використано меншу кількість біт, оскільки наше око більш чутливе до зеленого. В той же час 48-бітове HD представлення задля ліпшого опису кольорів пропонує застосовувати не цілочисельний формат, а формат чисел із плаваючим роздільником – половинний 16-бітовий формат.

Аналіз затрат пам’яті на запис графічних даних, котрих вимагає опис одного екрану, показує збільшення обсягу з підвищенням якості зображення. Бажання зекономити площу носія зумовило появу різних методів побудови графічних зображень. Так, поряд з растровою з’явилися векторна і фрактальна графіка.

Векторна графіка має ряд незаперечних переваг порівняно з растровою: в першу чергу, це можливість масштабування (об’єкт будь-якого розміру не втрачає своєї чіткості), по-друге – це менший обсяг пам’яті. В той же час векторна графіка, крім того, що використовує інші базові об’єкти – точка і лінія, які характеризуються координатами, типом, кольором та формою, потребує більших апаратних затрат на обробку зображення порівняно з растровою.

Опис природних об’єктів, скажімо, якісь ландшафтні фотографії, засобами векторної графіки майже не можливий на відміну від фрактальної. Фрактальна графіка, в основі якої лежать рекурсивні співвідношення математичних об’єктів, може описати об’єкти довільної форми, використовуючи малий обсяг даних, але вимагає значних апаратних затрат і спеціальних алгоритмів перетворення, які на разі захищені патентами і використовуються вельми обмежено».

За результатами педагогічного досвіду можна зробити наступні висновки.

1. Компетентність вчителя в області комп’ютерної графіки розуміється не тільки як сукупність знань, умінь і навичок в галузі застосування комп’ютерної графіки, але і

як здатність орієнтуватися в сучасному інформаційному потоці графічної інформації, готовність до відбору адекватних програмних засобів комп'ютерної графіки, до ефективного використання в педагогічній діяльності сучасних засобів комп'ютерної графіки.

2. Застосування графіки не тільки дозволяє збільшити швидкість передачі інформації і підвищити рівень її розуміння, але і сприяє розвитку образного мислення.

3. Вивчення і подальше використання комп'ютерної графіки у професійній діяльності вчителя формує здатність не лише швидко сприймати візуалізовані об'єкти, а й створювати якісні супровідні навчальні матеріали.

4. Для успішної роботи з графічними редакторами студентам необхідно засвоїти основні теоретичні положення, що дають уявлення про цифрове представлення графічних даних, про роботу монітора і відеоадаптера.

Список використаних джерел

1. Інформатика в схемах і таблицях : Навчальний посібник / О.В. Семеніхіна, В.Г. Шамоня, О.М. Удовиченко, А.О. Юрченко. – Суми: Вид-во СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2013. – 74 с.
2. Сакулина Ю. В., Рожина И. В. Компьютерная графика как средство формирования профессиональных компетенций / Ю. В. Сакулина, И. В. Рожина // Педагогическое образование в России, 2012. – № 6. – С. 76-80.
3. Семеніхіна О. В. Формування готовності вчителя математики до використання засобів комп'ютерної візуалізації математичних знань як педагогічна проблема / О. В. Семеніхіна // Наукові записки. Сер. : Проблеми методики фізикоматематичної і технологічної освіти : зб. наук. пр. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2015. – Вип. 8. – Ч. 2. – С. 43-47.
4. Семеніхіна О. В. Модель формування професійної готовності вчителя математики до використання засобів комп'ютерної візуалізації математичних знань / О. В. Семеніхіна // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології : наук. журн. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2015. – № 7(51). – С. 143-149.
5. Семеніхіна О. До питання про співвідношення понять наочність і візуалізація / О. Семеніхіна, О. Бабич // Фізико-математична освіта : наук. журн. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2014. – № 2(3). – С. 47-53.

Анотація. Шамоня В., Удовиченко О., Юрченко А. Про комп'ютерну графіку як інструмент навчання і професійної діяльності вчителя. *У статті розглянуто комп'ютерну графіку як елемент інформаційної культури майбутнього вчителя. Обґрунтовано потребу використання комп'ютерної графіки в навчальному процесі для якісного візуального супроводу відповідного курсу. Описано візуальну підтримку теми «Формалізація графічних даних» на основі авторських схем, таблиць, графіків.*

Ключові слова: *комп'ютерна графіка, візуалізація, інформаційна культура, підготовка вчителя.*

Abstract. Shamona V., Udovychenko O., Yurchenko A. About the computer graphics as a tool for learning and professional activity of the teacher. *The article deals with computer graphics as part of an information culture of the future teacher. Substantiates the need for the use of computer graphics in teaching for quality visual support proper course. Described visual support theme "The formalization of graphic data" based on author charts, tables, graphs.*

Шамшина Наталія
Старший викладач кафедри інформатики
shamichek@ukr.net

ВИКОРИСТАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ДІАГРАМ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ДАНИХ В EXCEL

Стрімкий розвиток технологій візуалізації даних у різних програмних продуктах, що ми спостерігаємо зараз, є наслідком інформатизації суспільства, зміни інформаційного середовища та розповсюдження приладів для надання інформації на екранах. Оскільки інформатизація має на меті поліпшення якості життя людей, розробники працюють у двох напрямках: по-перше, щоб з першого погляду на зображення можна було зрозуміти про що йдеться и зробити висновки, тобто «коротко і ясно»; по-друге, щоб зображення привертали увагу й запам'ятовувалися, були різноманітними.

Найбільш популярним способом візуалізації числових даних є діаграми, серед яких останнім часом з'явилося багато нових незвичних типів. А найбільш затребуваним у сучасному суспільстві для обробки числової інформації є табличний процесор Excel, один з базових програмних продуктів пакету Microsoft Office.

Питання візуалізації даних за допомогою нестандартних діаграм в Excel немає достатньої методичної підтримки й тому є актуальним. Навчитися будувати діаграми для специфічного відображення відсотків, проміжків часу, чисел та їх співвідношень – наступний крок в опануванні табличного процесора та здобуття професійних компетенцій майбутнього вчителя інформатики. Створення нестандартних діаграм в Excel також може стати у нагоді майбутнім вчителям математики та економіки тому, що нові види діаграм мають велике значення для обробки різних типів даних, особливо економічної спрямованості [1].

Мета статті – ознайомити з нестандартними діаграмами для візуалізації даних в Excel, новими типами діаграм, що з'явилися у останніх версіях програми та доповісти про результати науково-методичних досліджень з цього питання на кафедрі інформатики фізико-математичного факультету СумДПУ ім. А.С. Макаренка.

Для наочного відображення табличних даних або результатів аналізу в Excel звертаються до побудови діаграм, за допомогою яких легко зробити потрібні висновки про протікання того чи іншого процесу. Протягом майже 20 років для користувачів Excel були доступними 11 типів діаграм, що можна використовувати як відправні точки для створення власних діаграм: Гістограма, Лінійчата, Графік, Кругова діаграма, Діаграма з областями, Точкова діаграма, Біржова діаграма, Поверхнева діаграма, Кільцева діаграма, Бульбашкова діаграма, Пелюсткова діаграма. Серед них були передбачені варіанти: з групуванням, з накопиченням, нормовані з накопиченням, об'ємні, з маркерами, з геометричними фігурами тощо. Цей набір був достатньо універсальним для візуалізації числових даних або їх співвідношень та отримав назву «стандартні» діаграми Excel.

Проте на даному етапі існують нові версії програми Microsoft Excel 2013, Microsoft Excel 2016 в яких з'явилися принципово нові типи діаграм, більшість із яких у попередніх версіях можна було збудувати лише за допомогою спеціальних надбудов та великої кількості складних операцій: діаграма-водоспад, ієрархічна діаграма, діаграма-сонячні промені, діаграма Парето, діаграма розкиду, частотна діаграма, комбінована діаграма [1]. Поки що, вони є незвичними для звичайних користувачів, тому їх вважають нестандартними. Крім того, к нестандартним відносять діаграми Excel, які не ввійшли в нову версію програми, однак вже набули популярності: вафельну діаграму, діаграму Ганта, діаграму-торнадо, діаграму-шкалу тощо [4].

Розглянемо, наприклад, призначення деяких нестандартних діаграм, які можна побудувати в Excel:

Водоспад – також може називатися іншими словами – міст, сходинки, каскадна діаграма. Даний тип діаграми дуже часто використовують у фінансовому аналізі, щоб наочно відобразити динаміку зміни параметра у часі (потоку готівки, інвестицій) чи вплив різних факторів на результат. На діаграмі водоспаду відображається проміжний підсумок у процесі додавання або віднімання значень. Це дає змогу зрозуміти, як на початкове значення (наприклад, чистий дохід) впливає ряд додатних і від'ємних значень. Стовпці позначаються певним кольором, тому додатні й від'ємні числа можна швидко розрізнити (рис. 1).

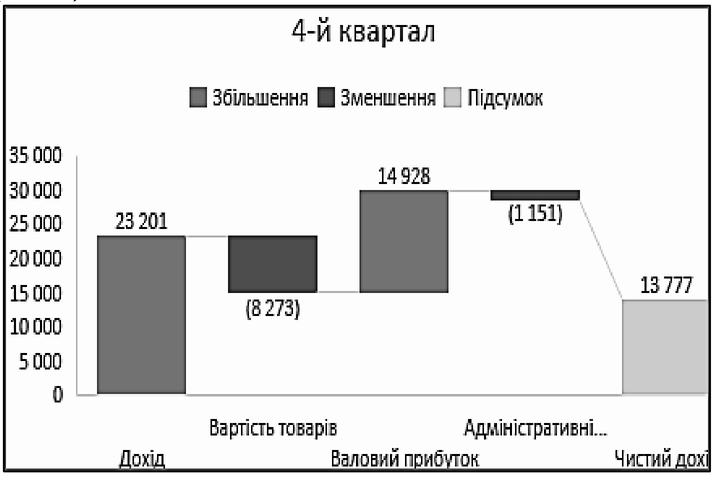


Рис.1. Діаграма-водоспад

Ієрархічна – специфічний тип діаграми для наочного відображення розподілу якого-небудь параметра за категоріями у вигляді деякої прямокутної клаптикової ковдри. Зручно використовувати для візуалізації прибутків по регіонах чи виручки за категоріями товарів (рис. 2).

Рис.2. Ієрархічна діаграма

Діаграма Парето – класична діаграма для візуалізації «закону 80/20» чи закону Парето. У загальному вигляді він сформулюється як «20% зусиль дають 80% результату». Стосовно до бізнесу, це «20% товарів дають 80% виручки», або «20% клієнтів створюють 80% проблем» тощо. У такій діаграмі наочно відображається гістограмою сумарна виручка по кожному товару і, одночасно, графік показує накопичену частку виручки (рис. 3).

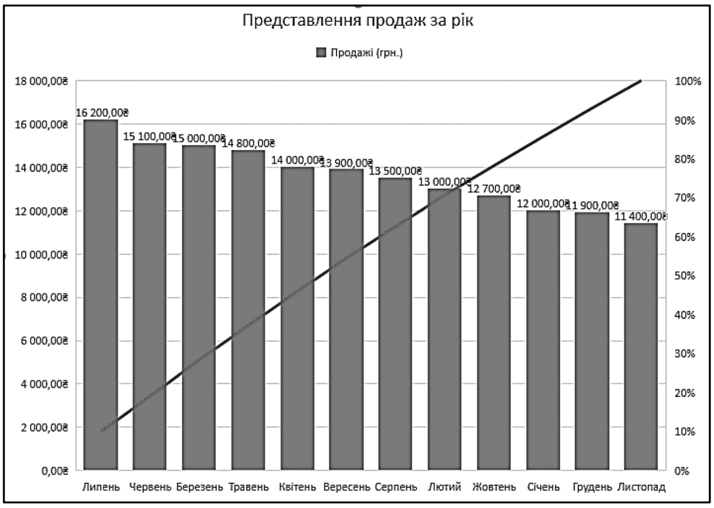


Рис.3. Діаграма Парето

Діаграма Ганта – також проектна діаграма, стрічкова діаграма, графік Ганта – один із найбільш популярних способів графічної демонстрації плану проекту, оскільки ілюструє зображення календарного графіку завдань у проекті. Діаграма Ганта дозволяє візуально оцінити послідовність завдань, їх відносну тривалість та тривалість проекту у цілому; порівнювати план подій та реальний хід виконання завдань; детально аналізувати реальний хід завдань, що виконуються (рис. 4).

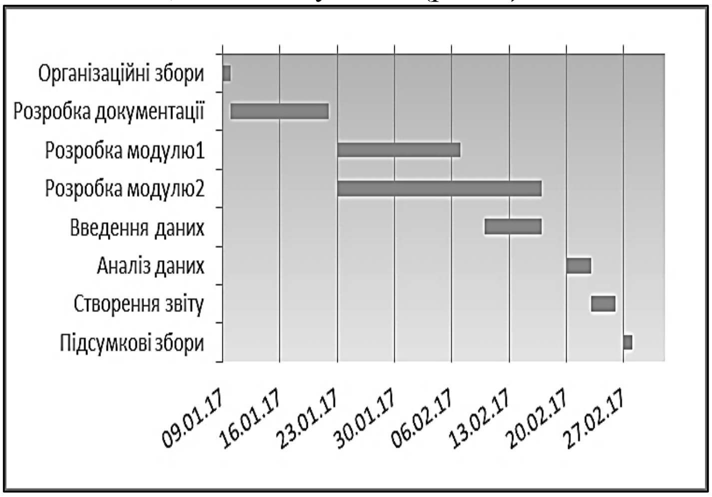


Рис.4. Діаграма Ганта

Можливості Excel для побудови нестандартних діаграм стали предметом дослідження на кафедрі інформатики цього року. Проаналізувати технології створення деяких нестандартних діаграм в Excel та описати методи їх побудови для різних версій програми – таки завдання було сформульовано як теми курсової роботи для студентів III курсу спеціальності інформатика. Також під час роботи гуртка, факультативно, студенти II-III курсів приймали участь у дослідженнях на цю тему.

Результатом роботи стали публікації статей та студентських наукових робіт [1-3], розробка нової лабораторної роботи з курсу «Інформаційні технології» для студентів педагогічного університету фізико-математичного факультету. Завдання лабораторної роботи спрямовані на закріплення отриманих знань і вироблення навичок роботи в Excel, необхідних для побудови і редагування нестандартних діаграм, форматування елементів діаграм різних типів.

Дослідження методів конструювання нестандартних діаграм сприяє поглибленню знань про створення діаграм, спонукає до творчого пошуку, розвиває креативне мислення. Сам процес комп'ютерного моделювання нестандартних діаграм в Excel є одним з ефективних методів навчання інформаційним технологіям, який сприяє розвитку творчої особистості. Тому, при вивченні дисциплін природничо-математичного циклу необхідно приділити належну увагу комп'ютерному моделюванню нетривіальних діаграм.

Вміння будувати діаграми призводить до кращого розуміння тих даних, які відображає діаграма, і отже, до вміння «читати» подібні діаграми. Чим більше нестандартних, нетривіальних діаграм приходиться створювати студентам при вивченні дисципліни «Інформаційні технології», тим краще в майбутньому вони зможуть орієнтуватися в області візуалізації даних та в комп'ютерному моделюванні явищ реального світу [2].

Вивчення методів побудови нестандартних діаграм в Excel готує студентів до подальшої професійної діяльності та підвищує їх рівень компетентності, а також розвиває творчу уяву і активізує пізнавальну діяльність.

Список використаних джерел

1. Шамшина Н. Візуалізація числових даних в Excel 2016 // [Текст]: Збірник матеріалів науково-практичної конференції СумДПУ ім.А.С.Макаренка, 23-25 грудня 2016 р. – Суми: Вид-во СумДПУ ім.А.С.Макаренка, 2017. – С.197-198. (0,05 друк.арк.)
2. Шамшина Н. Комп'ютерне моделювання діаграми Ганта в Excel // [Текст]: Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс - 2017»: матеріали Міжнародної дистанційної науково-методичної конференції (1-2 березня 2017 р., м. Суми): У 3-х частинах. Частина 3 / упорядник Чашечникова О.С. – Суми: видавничо-виробниче підприємство «Мрія» ТОВ, 2017. – С.55-56. (0,21 друк.арк.)
3. Шаповал А. Нові можливості створення діаграм в EXCEL 2016 // [Текст]: Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця» (НПК-2016) м. Суми, 1-2 грудня 2016 р. – Суми: ВВП «Мрія», 2016. – С. 78–80 (0,30 друк. арк.).
4. Диаграммы //Планета-Excel [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.planetaexcel.ru/techniques/4/

Анотація. *Шамшина Н. Використання нестандартних діаграм для візуалізації даних в Excel. Стаття присвячена новітнім технологіям візуалізації числових даних в Excel та дослідженням методів комп'ютерного моделювання нестандартних діаграм. Автор відзначає позитивний вплив вивчення нестандартних діаграм на рівень професійної підготовки студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів.*

Ключові слова*: нестандартні діаграми, Excel, вивчення інформаційних технологій*

Abstract. *Shamshina N. Use nonstandard chart to visualize data in Excel. The article is devoted to the latest technology visualizing numerical data in Excel and research methods of computer modeling of nonstandard charts. The author notes the positive impact of studying unusual charts to the level of training of students of physical and mathematical specialties of pedagogical universities.*

Keywords: *nonstandard charts, Excel, study information technology.*

Шишенко Інна
Викладач кафедри математики
shiinna@ukr.net

Шишенко І.В.

ШЛЯХИ ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ СТАРШОКЛАСНИКІВ КЛАСІВ ГУМАНІТАРНОГО ПРОФІЛЮ НАВЧАННЯ

Соціальним замовленням сучасного українського суспільства є запровадження в старшій ланці загальноосвітньої школи профільного навчання. Старшокласники нині опановують математику за програмами чотирьох рівнів. У результаті аналізу даних, наданих обласними державними управліннями України, встановлено, що майже четверта частина учнів 10-11 класів обирає навчання в класах гуманітарних профілів, де математика є базовим предметом.

Для організації навчання математики в таких класах характерними є низка протиріч, які можна узагальнити у глобальне протиріччя між об’єктивною необхідністю активізації пізнавальної діяльності старшокласників класів з гуманітарним профілем навчання у процесі навчання математики та відсутністю відповідного методичного забезпечення. Тому важливим є пошук шляхів активізації пізнавальної діяльності цих учнів через формування їх позитивної мотивації до навчання, ефективний добір навчального матеріалу, удосконалення форм, методів і засобів навчання математики.

Математична компетентність для всіх учнів, у тому числі й класів з гуманітарним профілем навчання, має бути серед якостей особистості та забезпечувати можливості для ефективної діяльності в різних сферах. Встановлено, що вивчення математики в класах з гуманітарним профілем навчання регламентується Державним стандартом базової та повної загальної середньої освіти та Навчальними програмами з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Переважна більшість учнів класів з гуманітарним профілем навчання вивчають математику за програмою рівня стандарту як інтегрований курс.

Аналіз методичних напрацювань сучасних дослідників засвідчив, що: а) вивчення математики в класах з гуманітарним профілем навчання викликає в учнів значні труднощі; б) для розв’язання проблем математичної освіти учнів цих класів надзвичайно важливою є постійна та цілеспрямована робота з діагностування їх індивідуальних особливостей.

Результати теоретичного дослідження та вивчення стану математичної підготовки учнів класів з гуманітарним профілем навчання показали існуючі проблеми, що виникають під час навчання математики учнів цих класів, зумовлюють недостатній рівень їх математичної підготовки, пасивність та формалізм, через які відсутня активність у навчанні. Перш за все, це проблема недостатньої мотивації пізнавальної діяльності учнів-гуманітаріїв і проблема психологічних бар’єрів учнів класів гуманітарних профілів під час навчання математики.

Проведене нами дослідження дало змогу охарактеризувати психолого-педагогічні особливості вивчення математики учнями-гуманітаріями, серед яких: мислення образами, а не абстрактними конструкціями; при відтворенні формулювань означень чи доведень теорем часто відсутнє глибоке розуміння вивченого, учні відтворюють їх, «наче вірші»; пояснення до завдань завжди розширене, не лаконічне тощо.

Відповідно до цих особливостей з метою здійснення диференційованого підходу до навчання математики учнів класів з гуманітарним профілем навчання важливо об’єднувати у різні групи. За результатами проведеного нами дослідження на основі врахування рівня навченості та научуваності учнів та рівня сформованості мотивів до навчання математики було виділено 9 груп таких учнів. Тому етапи навчального процесу слід здійснювати з урахуванням розподілу цих учнів на групи відповідно до їх особливостей.

Активізація пізнавальної діяльності учнів класів з гуманітарним профілем навчання в процесі навчання математики має розумітися як спільна діяльність учителя математики та цих учнів, спрямована на подолання негативних установок та психологічних бар'єрів щодо вивчення ними математики, що проявляється в підвищенні рівня активності учнів через формування та розвиток пізнавального інтересу (розуміння математики як засобу розумового розвитку), пізнавальної активності (прагнення учнів до усвідомлення й розв'язування завдань нестандартного характеру) та пізнавальної самостійності (удосконалення самооцінювальної діяльності учнів).

Нами розроблена змістова модель активізації пізнавальної діяльності учнів класів з гуманітарним профілем навчання в процесі навчання математики, яка передбачає такі етапи: дидактична установка, мотивація учнів через ситуацію «імпресінга», постановка мети та завдань, робота з досягнення компетентності, рефлексія.

Відповідно до розробленої моделі вивчення нового матеріалу слід розпочинати з дидактичної установки, у процесі якої вчитель має створити в учнів особистісну необхідність у вивченні матеріалу. Найефективнішою формою організації навчальної діяльності учнів на даному етапі є фронтальна робота, а найефективнішим методом – бесіда вчителя про корисність вивчення нового матеріалу. На уроках алгебри та початків аналізу бесіда має бути спрямована на розкриття особливостей застосування нового матеріалу в майбутній професійній діяльності, а на уроках геометрії – у повсякденному житті.

На етапі мотивації учнів через ситуацію імпресінга важливо зацікавити кожного учня, захопити несподіваною ситуацією, яка має стосуватися саме майбутньої професійної діяльності цих учнів. Обов'язково на даному етапі пропонувати всім учням довгострокове домашнє завдання з розв'язування прикладних задач.

На етапах постановки мети та завдань вивчення теми ефективним є формулювання учнями особистої мети та завдань вивчення теми через заповнення відповідних таблиць.

У процесі вивчення нового матеріалу свою ефективність засвідчила шкільна лекція. Особливістю лекції є значна кількість прикладів, наявність пояснень без математичної термінології, наведення учнями власних прикладів, введення елементів актуалізації опорних знань, значна кількість алгоритмічних приписів, зразків діяльності, ілюстрація матеріалу, що вивчається, іноземною мовою, підготовка повідомлень на історичну тематику.

Головною особливістю навчання математики учнів-гуманітаріїв під час формування вмінь і навичок має стати формування вмінь знаходження шляхів розв'язання задачі за мінімального обсягу знань. Уроки формування навичок, умінь також доцільно проводити у формі уроку з елементами психологічного тренінгу, інтегрованого уроку, уроку лабораторно-практичної роботи, уроку-конференції. Для забезпечення прикладної спрямованості шкільного курсу математики в класах з гуманітарним профілем навчання слід організовувати розв'язування учнями цих класів прикладних задач у вигляді довгострокового домашнього завдання та у вигляді портфоліо цих учнів.

Головною особливістю контрольно-оцінювальної діяльності вчителя математики в класах з гуманітарним профілем навчання є врахування рівня мотивації вивчення математики. Доцільно запровадити трирівневу структуру системи контролю до кожної теми, де особливу увагу приділяємо самоконтролю учнів.

Серед засобів навчання математики значну увагу доцільно приділити використанню електронних наочностей, педагогічних програмних засобів GRAN 1, GRAN-2D, GRAN 3D, DG, а також динамічних стереометричних моделей. Доцільним є також використання в цих класах робочих зошитів з друкованою основою у формі узагальнювальних опорних конспектів з поясненнями та зразками виконання завдань.

Нами упродовж 2005 – 2016 рр. проводилась дослідно-експериментальна робота. Дослідження проводилося серед учнів 10-11 класів з гуманітарним профілем навчання. Експериментальна група навчалася за розробленою моделлю підготовки, а в контрольній групі навчалися в звичайних найбільш поширених умовах навчання математики в класах з гуманітарним профілем навчання. На початку та в кінці експерименту для визначення рівнів активності учнів було проведено їх психологічне тестування, оцінка вчителем рівня їх пізнавального інтересу та діагностувальна контрольна робота. Проведене дослідження супроводжувалося статистичним опрацюванням результатів і відповідною їх інтерпретацією. Зрізи показали, що в експериментальних класах у результаті запровадження розробленої методики навчання математики учнів класів з гуманітарним профілем навчання, яка сприяє активізації їх пізнавальної діяльності, рівень активності учнів на уроках математики зріс.

Отримані результати дослідження дають підстави сформулювати такі висновки:

1. У процесі навчання математики учні класів з гуманітарним профілем навчання мають усвідомити роль математики як елемента загальної людської культури та міжпредметні зв’язки курсу математики з гуманітарними навчальними предметами; оволодіти прийомами розумових дій з розв’язування математичних і прикладних завдань. Значна частина випускників класів з гуманітарним профілем навчання складають ЗНО з математики. Результати виконання цих завдань засвідчують зниження рівня навчальних досягнень учнів з математики, а відповідно й відсутність стійких мотивів до навчання математики. Для вирішення цієї актуальної проблеми необхідно модифікувати й удосконалити чинну методичну систему навчання математики в класах з гуманітарним профілем навчання, спрямовуючи її на активізацію пізнавальної діяльності цих учнів.

2. Учні класів з гуманітарним профілем навчання мають ряд психолого-педагогічних особливостей, що проявляються у процесі навчання математики. Учнів цих класів доцільно об’єднувати в гомогенні групи за рівнем навченості та научуваності та за рівнем сформованості мотивів до навчання математики.

3. Процес навчання математики учнів-гуманітаріїв ускладнюється низкою проблемам. Пропонування шляхів для вирішення цих проблем й буде створювати умови для активізації пізнавальної діяльності таких учнів у процесі навчання математики.

4. Розроблена методика ґрунтується на формуванні позитивної мотивації до навчання через обґрунтований добір та структурування навчального матеріалу, подальше удосконалення форм, методів і засобів навчання математики цих учнів.

5. У процесі експерименту було підтверджено, що рівень активності в процесі навчання математики учнів класів гуманітарних профілів, які навчалися за методикою, зорієнтованою на активізацію їх пізнавальної діяльності, об’єктивно вищий за такий же показник у групі, яка навчалася в звичайних найбільш поширених умовах навчання математики в класах з гуманітарним профілем навчання.

Список використаних джерел

1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/ua/often-requested/state-standards/

2. Математика. Навчальні програми для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <www.mon.gov.ua>. – Загол. з екрану. – Мова укр.
3. Шишенко І. В. Методи та форми організації навчання математики, спрямовані на активізацію пізнавальної діяльності учнів класів гуманітарних профілів / І. В. Шишенко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі : Зб. наук. праць. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. – № 14. – С. 118-126.
4. Шишенко І.В. Проблема математичної підготовки учнів-гуманітаріїв у наукових дослідженнях / І. В. Шишенко // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Вип. 2 (5). – С. 83-91.

Анотація. Шишенко І.В. Шляхи вдосконалення методичної системи навчання математики старшокласників класів гуманітарного профілю навчання. *У статті з'ясовано реальний стан проблеми навчання математики старшокласників класів гуманітарного профілю навчання; визначено особливості учнів-гуманітаріїв, що проявляються в навчанні математики; визначено шляхи активізації пізнавальної діяльності учнів класів з гуманітарним профілем в процесі навчання математики.*

Ключові слова: *профільна диференціація, класи з гуманітарним профілем навчання, математика, активізація пізнавальної діяльності.*

Abstract. Shyshenko I.V. Ways to improve the methodical system of teaching mathematics senior students in humanitarian sciences forms. *In the scientific thesis, the real state of the investigated problem in the theory and practice of teaching has been clarified. Psychological and pedagogical peculiarities of students-humanitarians manifested in the studying of mathematics are defined. The ways and means of students' cognitive activity activation in humanitarian sciences forms at Mathematics lessons have been defined and theoretically grounded.*

Keywords*: profile differentiation, forms of humanitarian sciences, mathematics, cognitive activity activation.*

Хворостіна Юрій
старший викладач кафедри математики
y-y-y@fizmatsspu.sumy.ua
Юрченко Артем
викладач кафедри інформатики
a.yurchenko@fizmatsspu.sumy.ua

ЗАСТОСУВАННЯ РОЗКЛАДІВ ЛЮРОТА ДО МОДЕЛЮВАННЯ І РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ, ТЕОРІЇ МІРИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ФРАКТАЛЬНОГО ТА ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Вступ

Означення 1. ***Представленням (розкладом) числа*** $x \in (0;1]$ *знакозмінним рядом Люрота називається вираз*

$$x=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}+\cdots,$$

де $a_n\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}$.

Означення 2. ***Зображенням числа*** $x\in(0;1]$ *знакозмінним рядом Люрота (*$\tilde{L}$*-**зображенням**) називається вираз*

$$x=\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\varphi\chi \mathrm{a_n}\in \mathrm{N}.$$

Приклад. $a_n=1,\forall n\in N$

$$x=\frac{1}{1}-\frac{1}{(1+1)\cdot 1}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{(1+1)\cdot 1(1+1)\cdot 1}\cdot\frac{1}{1}-\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

$$x=\Delta^{\tilde{L}}_{111\ldots}=\Delta^{\tilde{L}}_{(1)}.$$

Дослідження знакозмінних рядів Люрота

Лема 1. *Кожний знакозмінний ряд Люрота абсолютно збіжний і його сума* належить інтервалу $(0;1)$.

Лема 2. *Різні знакозмінні ряди Люрота мають різні суми.*

Теорема 1. *Якщо* s *— сума знакозмінного ряду Люрота,* s_n *— його часткова сума, то*

$$a_1=\left[\frac{1}{s}\right],\quad a_{n+1}=\left[\frac{(-1)^n}{(s-s_n)a_1(a_1+1)\ldots a_n(a_n+1)}\right].$$

Дослідження множини неповних сум ряду Люрота Зафіксуємо знакозмінний ряд Люрота з сумою r.

Означення 3. *Множина* $C_r=\left\{x{:}\,x=\sum_{n\in M\subset N}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a_1(a_1+1)\cdot\ldots\cdot a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},M\in\sigma(N)\right\}$*, де* $\sigma(N)$ *— множина всіх підмножин множини* N*, називається множиною неповних сум ряду Люрота.*

Теорема 2. *Множина неповних сум ряду Люрота* C_r *є:*

1. відрізком $\left[-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, якщо $a_n=1\quad\forall n\in N$;
2. об'єднанням скінченного числа відрізків, якщо $a_n=1$ для всіх n, більших деякого m;
3. ніде не щільною досконалою множиною нульової міри Лебега, якщо $a_n\neq 1$ для нескінченної множини значень n.

$\tilde{L}$-зображення дійсних чисел

Теорема 3. *Для довільного дійсного числа* $x\in(0,1]$ *існує скінченний набір натуральних чисел* $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *або нескінченна послідлвність* (a_n) *таких, що*

$$x=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}+\cdots\quad.$$

Теорема 4. *Дійсне число* $x\in(0,1]$ *є раціональним тоді і тільки тоді, коли його* $\tilde{L}$*-зображенням є скінченним або періодичним.*

Оператор зсуву символів $\tilde{L}$-зображення

У множині $\mathcal{Z}^{\tilde{L}}_X$ всіх $\tilde{L}$-зображень дійсних чисел множини X розглянемо оператор $\hat{\varphi}$ зсуву цифр, означений рівністю

$$\hat{\varphi}(\Delta^L_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^L_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

який породжує відображення $\varphi{:}\,X\to X$.

Властивості оператора зсуву:

1) Оператор $\hat{\varphi}$ має зчисленну множину інваріантних точок:

$$\Delta^L_{(c)},\varphi\chi c\in\mathbb{N}.$$

2) Оператор $\hat{\varphi}$ є сюр'єктивним, але не є ін'єктивним.

T^n_δ-перетворення

T^n_δ*- перетворенням точки* $x = \Delta^{\tilde{L}}_{a_1 a_2 \dots a_k \dots}$, де $\delta = (\delta_1 \dots \delta_n)$ — деякий впорядкований набір натуральних чисел, називається перетворення таке, що

$$T^n_\delta(x) \equiv \Delta^{\tilde{L}}_{\delta_1 \dots \delta_n a_1 \dots a_k \dots}.$$

Інваріантною точкою T^n_δ-перетворення є точка $x_0 = \Delta^{\tilde{L}}_{(\delta_1 \dots \delta_n)}$, яка має чисто періодичне $\tilde{L}$-зображення з періодом $(\delta_1 \dots \delta_n)$.

T^n_δ*- перетворенням множини* E називається множина T^n_δ-образів всіх $x \in E$, тобто

$$T^n_\delta(E) = \{u : u = T^n_\delta(x), \varphi\chi\ x \in E\}.$$

T^n_δ-перетворення є *перетворенням подібності* з коефіцієнтом

$$k = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_i(\delta_i+1)}.$$

Для міри Лебега справедлива рівність $\lambda[T^n_\delta(E)] = k\lambda(E)$.

Геометрія $\tilde{L}$-зображенням

Означення 4. ***Циліндром*** *рангу* n *з основою* $c_1, c_2, \dots, c_n$, *де* $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ — *фіксований впорядкований набір натуральних чисел, називається множина*

$$\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 c_2 \dots c_n} = \{x : x = \Delta^{\tilde{L}}_{c_1 c_2 \dots c_n a_{n+1} a_{n+2} \dots}\}.$$

Властивості циліндрів

1. $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_n} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_n i}$.
2. $\sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_{2m-1} i} = \inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_{2m-1}(i+1)}$;
   $\inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_{2m} i} = \sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_{2m}(i+1)}$.
3. $\operatorname{diam}\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_n} \equiv |\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots \dots c_n}| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_n(c_n+1)}$.
4. Якщо $d_j(a) = d_j(b)$ при $j < m$ і $d_m(a) > d_m(b)$, то
   $a < b$ при $m = 2n - 1$ і $a > b$ при $m = 2n$.
5. Довільна перестановка $\tilde{L}$-символів в основі циліндра не змінює його довжину.
6. $\frac{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_m i}\right|}{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \dots c_m}\right|} = \frac{1}{i(i+1)}$.

Найпростіші метричні задачі

Лема 3. *Міра Лебега множини* Δ^k_i *чисел* $(0,1]$, *які в* $\tilde{L}$*-зображенні на* k*-му місці мають число* i, *обчислюється за формулою*

$$\lambda(\Delta^k_i) = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Лема 4. *Міра Лебега множини чисел* $(0,1]$, *які на* k_1 *місці мають цифру* c_1, *а на* k_2 *місці мають цифру* c_2 *і т. д., на* k_m *місці — цифру* c_m, *обчислюється за формулою:*

$$\lambda(\Delta^{k_1 \dots k_m}_{c_1 \dots c_m}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Наслідок 1. *Циліндри* $\tilde{L}$*-зображення є метрично незалежними, тобто*

$$\lambda(\Delta^{k_1 \dots k_n \dots k_m}_{c_1 \dots c_n \dots c_m}) = \lambda(\Delta^{k_1}_{c_1}) \cdot \ldots \cdot \lambda(\Delta^{k_n}_{c_n}) \cdot \ldots \cdot \lambda(\Delta^{k_m}_{c_m}).$$

Наслідок 2.

$$\lambda(\Delta^{k_1 \dots k_m \dots}_{c_1 \dots c_m \dots}) = 0.$$

Випадкові величини, породжені знакозмінними рядами Люрота:

1) ξ — випадкова величина з незалежними натуральними елементами розкладу в знакозмінний ряд Люрота;

2) θ — випадкова величина, символи $\tilde{L}$-зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю;

3) τ — випадкова неповна сума (підсума) заданого ряду з незалежними коефіцієнтами;

4) η — випадкова неповна сума заданого ряду Люрота, коефіцієнти якого утворюють однорідний ланцюг Маркова.

Джерело сингулярних функцій

Теорема 5. *Функція розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ подається у вигляді*

$$F_\xi(x) = \beta_{a_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{a_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)j}\right),$$

де $\beta_{a_k(x)k} = \begin{cases} \sum_{j=a_k(x)+1}^{\infty} p_{jk}, & Ђk = 2m-1, \sum_{j=1}^{a_k(x)-1} p_{jk}, Ђk = 2m, m \in N. \end{cases}$ $\{$

Теорема 6. *Якщо в точці $x_0 = \Delta^{\tilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ функція розподілу F_ξ має похідну (скінченну або нескінченну), то вона виражається*

$$F'_\xi(x_0) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(a_i(a_i+1)p_{a_i i}\right).$$

Теорема 7. *Функція розподілу випадкової величини ξ є сингулярною тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{p_{mk}}{m(m+1)}}\right) = 0.$$

Фрактальні множини

Лема 5 *Графік $Г$ функції розподілу випадкової величини з однаково розподіленими $\tilde{L}$-символами є N-самоафінною множиною, причому*

$$\Gamma = \varphi_1(\Gamma) \cup \varphi_2(\Gamma) \cup \ldots \varphi_n(\Gamma) \cup \ldots, \varphi\chi$$

$$\varphi_i: \begin{cases} x' = \frac{1-x}{i(i+1)} + \frac{1}{i+1}, \\ y' = p_i(1-y) + \beta_i. \end{cases}$$

$$\varphi_i(\Gamma) \cap \varphi_{i+1}(\Gamma) = C_i\left(\frac{1}{i+1}; \beta_i\right).$$

Динамічні системи

Розглянемо дві динамічні системи (X, f, B, λ) і (X, ϕ, B, λ), де

$$1) f(\Delta^{\tilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}) = \Delta^{\tilde{L}}_{(a_1+a_2)a_3 \ldots a_n \ldots},$$

$$2) \phi(\Delta^{\tilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}) = \Delta^{\tilde{L}}_{(a_1 \cdot a_2)a_3 \ldots a_n \ldots};$$

B – σ-алгебра борелевських множин з X, а $\lambda(\cdot)$ – міра Лебега.

Динаміка, породжена відображеннями f і ϕ, має принципові відмінності.

Відображення f *не має інваріантних точок*, а *атрактором* динамічної системи є точка $x = 0$.

Відображення ϕ *має безліч інваріантних точок*, а *атрактор* динамічної системи має значно складнішу структуру.

Список використаних джерел

1. Pratsiovytyi M.. Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements / Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu. // Random Oper. Stoch. Equ. – 2013. – Vol. 21, no. 4.– P. 385-401.
2. Працьовитий М. В. Фрактальна геометрія та перетворення, що збе-рігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Динамічні системи: Праці Українського математи-чного конгресу–2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 77–93.
3. Працьовитий М.В. Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній / Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2009. – №10. – С.14-28.

4. Працьовитий М.В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування / Працьо-витий М.В., Хворостіна Ю.В. // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2010. – №11. – С.102-118.
5. Хворостіна Ю.В. Випадкові неповні суми знакозмінного ряду Люрота, доданки якого утворюють однорідний ланцюг Маркова / Хворостіна Ю.В. // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2011. – №12 .– С.37-46.
6. Працьовитий М.В. Властивості розподілу випадкової неповної суми заданого знакозмінного ряду Люрота з незалежними коефіцієнтами / М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна // Наук. час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2013. – №14. – С.126-138.
7. Працьовитий М.В. Випадкова величина, символи $\tilde{L}$-зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю / Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2014. – Вип. 91. – С.146-157.

Анотація. ***Хворостіна Ю.*** **Застосування розкладів Люрота до моделювання і розв'язування задач з алгебри і теорії чисел, теорії міри, теорії ймовірностей і динамічних систем, фрактального та функціонального аналізу.** У статті наведено основні поняття і факти, пов'язані із знакозмінними рядами Люрота та $\tilde{L}$-зображення дійсних чисел. Також наведено застосування розкладів Люрота до розв'язування найпростіших метричних задач, моделювання випадкових величин, сингулярних функцій, фрактальних множин, динамічних систем.

Ключові слова: знакозмінний ряд Люрота, $\tilde{L}$-зображення, лебегівська структура розподілу, спектральна структура сингулярного розподілу, розмірність Хаусдофа-Безиковича носія, нескінченні згортки Бернуллі, неповна сума ряду.

Abstract. ***Khvorostina Y.*** **Application of Luroth expansions for modeling and solving algebra and number theory problems, theory of measure, probability theory and dynamical systems, fractal and functional analysis.** In the article we present the basic concepts and facts related to the alternating Luroth series and $\tilde{L}$-expansion of real numbers. Also, we present Luroth expansions for solving simple metric problems, modeling of random variables, singular functions, fractal sets, and dynamic systems is given.

Key words: alternating Luroth series, $\tilde{L}$-expansion, Lebesgue structure of probability distribution, spectrums structure of singular distribution, Hausdorff-Besicovitch dimension, infinite Bernoulli convolution, subsums of the series.

Наукове видання

НАУКОВІ ДОПОВІДІ

викладачів фізико-математичного факультету

ВИПУСК 2

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск
Ю.В. Хворостіна

Комп'ютерна верстка
Ю.В. Хворостіна

Фізико-математичний факультет
СумДПУ імені А.С. Макаренка
вул. Роменська, 87
м. Суми, 40002
тел. (0542) 68 59 10

http://fizmatsspu.sumy.ua