МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

НАУКОВІ ДОПОВІДІ

викладачів фізико-математичного факультету

ВИПУСК 1

Суми – 2016

Друкується згідно з рішенням вченої ради фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(*протокол №10 від 31 травня 2016 року*)

С45 Наукові доповіді викладачів фізико-математичного факультету. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2016. – Випуск 1.– 137 с.

До збірника увійшли результати наукових досліджень викладачів фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, які доповідалися на семінарах кафедр математики, інформатики, фізики та методики навчання фізики протягом 2015-2016 навчального року.

ЗМІСТ

Неля Дегтярьова
викладач кафедри інформатики
nelya-d@yandex.ru

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАПИТАНЬ РІЗНИХ ТИПІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ІНФОРМАТИКИ В ШКОЛІ (на матеріалах дисертаційного дослідження)

Різноманіття програмних засобів, призначених для проведення тестування, надає можливість вчителю обирати найзручніший та надійніший з існуючих з його точки зору. Досить велика кількість присвячених тестуванню досліджень свідчить про те, що дана тема не втрачає актуальності. Тестування з інформатики може проводитись як окремо, так і як частина комплексного завдання на уроках інформатики. Оскільки тестування в комплексному завданні є його частиною, що передбачає перевірку здебільшого теоретичного матеріалу, то проаналізувавши низки робіт щодо вимог складання тестів та їх використання, були враховані результати сучасних досліджень, а саме [4-6;9-12]:

1) щодо *організації* тестування при вивченні окремої теми в шкільному курсі інформатики:

– тестування має охоплювати ті питання з теми, які вивчаються і є обов’язковими для засвоєння та виконання практичної роботи;

– після виконання тестів учень повинен мати змогу одразу або після виконання практичної частини комплексного завдання дізнатися, на які з питань він дав правильну чи неправильну відповіді, знайти при необхідності роз’яснення матеріалу, на який спиралися при створенні тестів та отримати консультацію вчителя;

– метою тестування є перевірка засвоєння учнями теоретичної складової теми, виявлення незрозумілих моментів, а також його реалізацією забезпечується виконання навчальної функції та сприяння розвитку самоконтролю учнів;

2) щодо *складання* тестів необхідно враховувати такі вимоги:

– в тестуванні не повинно бути двозначності;

– тестове питання чи завдання формулюється лаконічно, зрозуміло, стисло;

– варіанти відповідей не викликають асоціацій для вгадування та їх довжина є приблизно однаковою;

– доцільно використовувати тести різних типів (закритого, відкритого типу; з альтернативними відповідями, з однією правильною відповіддю, з декількома правильними відповідями, на встановлення відповідності тощо);

– варіантів тестів повинно бути не менше 4-х для забезпечення індивідуальної роботи учня;

- повинні використовуватися програмні засоби, що дозволяють змінювати як порядок питань при виведенні на екран, так і варіанти відповідей, що відображаються в різній послідовності;

– за тестування нараховуються бали, що відповідають низькому та середньому рівнів навчальних досягнень в школі – 1, 2, 3, 4 бали, які завдяки програмним тестовим засобам не потребують перерахування в 12-бальну шкалу, спрощують сприйняття отриманих оцінок учнями і є елементом диференціації в опитуванні [1, с.110-114].

Щодо *оцінювання* результатів виконання тестових завдань в загальноосвітніх школах м. Суми переважно пропонуються вільно поширювані програми MyTest та TestW2. Вказані програми використовуються також і з тієї причини, що в них передбачено різні типи тестових питань. У дослідженнях, присвячених діагностуванню навчальних досягнень учнів за допомогою тестування, часто зустрічається думка про те, що виконання тестування, в яких зустрічаються питання з однією правильною відповіддю не дає змоги оцінити учнів об'єктивно і визначити наскільки вони розуміють зв'язки використовуваних функцій між собою, раціональність вибору того чи іншого інструменту, можуть оцінити результат роботи [7;8;9;11;12]. Тут пропонується використання завдань на доповнення, на встановлення відповідності, завдань з множинним вибором. У вказаних програмах вчитель має можливість створити не тільки такі типи тестових питань, але й завдання на встановлення порядку або ранжування, вибір частини зображення, завдання з альтернативними відповідями.

Так, встановлення порядку відображує розуміння учня наукового означення, порядку виконання дій. Такі завдання не тільки дають змогу вчителю визначити рівень знань учнів, але й виконують навчальну функцію: учень в процесі визначення певного порядку розмірковує, повторює, закріплює і свідомо засвоює навчальний матеріал. Пропонуємо розглянути приклади тестових завдань, що були використані в практичних роботах, і проаналізуємо результати використання різних їх типів [2;3].

У практичній роботі на тему «Обмін миттєвими повідомленнями» передбачалося використання програми Skype. Із метою актуалізації опорних знань пропонувалися подані нижче тестові запитання з альтернативними відповідями.

Чи погоджуєтеся Ви з твердженнями?

1. Для отримання надісланого файлу через програму Skype необхідне одночасне з'єднання обох користувачів з мережею.

2. Програма Skype призначена виключно для надсилання текстових повідомлень.

3. В програмі Skype одночасно можна спілкуватись не більше ніж з двома користувачами.

4. Якщо абонент «не в мережі», то текстове повідомлення, надіслане засобами програми Skype, він не отримає.

Таке завдання можна оцінити як 1 балом, так і розбити на частини і оцінювати окремо кожну складову. Це передбачено в функціях програми MyTest: при налаштуванні параметрів оцінювання встановлюється або знімається функція «зараховувати тільки 100% правильних відповідей».

Не виникає додаткових запитань при приблизно рівній кількості правильних і неправильних відповідей. Наприклад, у випадку коли пропонується 4 запитання з альтернативними відповідями, то, погоджуючись із 2 і не погоджуючись із такою ж кількістю, учень почуває себе комфортно. Якщо ж із запропонованих тверджень всі виявляються правильними або неправильними, то учень починає вагатись щодо власних знань. Одним з таких прикладів було запропоноване нижче наведене запитання в практичній роботі на тему «Розробка слайдової презентації. Створення фотоальбому в редакторі презентацій».

Укажіть чи можна розміщувати на слайдах презентації, створеної засобами програми Power Point, такі об'єкти:

а) малюнки;

б) організаційні діаграми;

в) текст;

г) таблиці.

Такими завданнями вчитель не тільки спонукає учня до уточнення відповіді після проходження тестування, але й виховує у ньому впевненість у власних знаннях. При повторенні такого типу запитань у подальшому учень звертає увагу на зміст запитання, а не на кількість правильних чи неправильних відповідей в ньому. Практична робота на тему «Аналіз графічних даних табличному процесорі Microsoft Excel» розпочиналася тестуванням, в якому також забезпечувалась відповідна ситуація.

Чи погоджуєтесь ви з наступним твердженням?

1. Діаграми необхідно розміщувати на окремих чи поточних аркушах.

2. У будь-який момент роботи з електронною таблицею одна з клітинок або діапазон клітинок є виділеними (іноді називають поточним).

3.При внесенні змін у таблицю, на основі якої будувалася діаграма, змінюється і сама діаграма.

4.Після побудови діаграми можна змінити тип діаграми, внести зміни в параметри.

Проте такі ситуації необхідно використовувати в невеликій кількості, а пропонувати також завдання, що містять як істинні твердження, так і хибні.

Виконання тестових завдань із множинним вибором пропонується з метою перевірки засвоєних знань на репродуктивному рівні, що також є важливим при закріпленні знань з вивчених тем, особливо на перших уроках. Також використовуються такі завдання для повторення опанованого раніше матеріалу для відображення циклічності вивчення інформатики та взаємозв'язку різних тем. В порівнянні з тестовими завданнями з однією правильною відповіддю завдання з декількома правильними відповідями дають змогу зменшити ймовірність вгадування. Учні по-іншому відносяться до таких питань, намагаються проаналізувати та співставити відповіді зі змістом запитання. Прикладом можна навести одне з запитань при вивченні теми «Введення даних і форматування таблиць у середовищі табличного процесору».

Виберіть дії, які можна виконувати в табличному процесорі Microsoft Excel.

а) створювати бази даних;
б) створювати таблицю виключно з текстовими даними;
в) створювати таблицю з числовими даними;
г) будувати діаграми;
д) створювати слайди;
е) редагувати растрові зображення.

В програмах для проведення тестових опитувань, що використовувались в межах дослідження, встановлювалося випадкове розташування відповідей, що давало змогу виключити повідомлення учнями порядкового номеру правильної відповіді.

У завданнях з множинним вибором також існує можливість оцінювати окремо кожне правильно обрану відповідь, що становить частину всього запитання, або оцінювати цілісно, тобто при всіх правильно вибраних відповідях учень отримує 1 бал. Також можна створити аналогічну ситуацію щодо створення всіх правильних відповідей.

Оберіть один або декілька об'єктів, які можна вставляти в текстовий документ засобами текстового процесора Microsoft Word:

а) зображення
б) формула
в) діаграма
г) таблиця

Одним із завдань, що використовується з метою допомоги учням при виконанні практичних завдань після проведення тестування є завдання з вибором частини зображення. Виконуючи його, учень демонструє діяльнісний аспект власних результатів навчання з інформатики, знання термінології, функцій конкретного програмного засобу тощо. Такі завдання, на перший погляд, є нескладними, проте забезпечують об'єктивність оцінювання.

Так великий відсоток неправильних відповідей було виявлено при застосуванні тестових завдань із вибором частини зображення визначення функції вставки організаційної діаграми при роботі з текстовими документами. Організаційні діаграми є схемами для візуального представлення текстових даних і на панелі інструментів меню Вставка назва такого об'єкту представлена як Smart Art. Останню учні часто плутають із числовими діаграми, функція для роботи з якими розташовується поряд.

Для підготовки учня до виконання практичних завдань також використовуються тестові запитання на встановлення відповідності. Проілюструвати це можна запитанням при виконанні практичної роботи «Робота з редактором формул в текстовому процесорі Microsoft Word». Виконання таких типів тестових завдань вимагає від учня знання теоретичної частини навчального матеріалу, проведення логічних розмірковувань, і відображають діяльнісний аспект інформатичних компетентностей. Більш наочно це представлено при вивченні теми «Сервіси глобальної мережі». В одній з практичних робіт пропонувалося питання вказаного типу:

Встановіть відповідність сервісів до технологій глобальної мережі:

форум	*Веб 1.0*
чат	*Веб 2.0*
електронна пошта	
фотосервіси	
геосервіси	
карти знань	

У цьому завданні відповідність встановлюється між неоднаковою кількістю елементів та категорій. Це також є особливістю застосування завдань таких типів, оскільки метод виключення в такому випадку застосувати не представляється можливим.

Тестування не замінює собою інші види роботи учня чи діагностування його знань, а лише доповнює, дає змогу отримати оцінку початкового та середнього рівнів навчальних досягнень, що також обов'язково повинен забезпечуватися при вивченні результатів навчання учнів. Тести передбачали як репродуктивний рівень відтворення матеріалу, так і аналітичний. Реалізація перевірки знань репродуктивного рівня забезпечувалася тестовими завданнями з однією правильною відповіддю та вибором частини зображення. Аналітичний же рівень був представлений завданнями на встановлення відповідності, порядку дій, завданнями з декількома правильними відповідями та завданнями на доповнення [1, с.116].

Таким чином, систематичне використання тестових завдань сприяє об'єктивності діагностування результатів навчання учнів, мотивації учня при виконанні домашніх завдань, розвитку вміння порівнювати, співставляти, аналізувати зміст питання. При впровадженні результатів дисертаційного дослідження тестування використовувалося як складова для здійснення діагностування, свідомого засвоєння навчального матеріалу школярами, їх активного відношення до навчання та підготовки до виконання наступної складової практичної роботи, а саме виконання безпосередньо практичних завдань.

Список використаних джерел

1. Дегтярьова Н.В. Методика використання комплексних завдань у процесі навчання інформатики в старшій школі: дис. … канд. пед. наук 13.00.02 / Н.В. Дегтярьова. – Київ, 2015. – 234 с.
2. Дегтярьова Н. В. Особливості оцінювання комплексних завдань з інформатки в старших класах загальноосвітньої школи / Н.В. Дегтярьова // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. – Чернігів: ЧПНУ, 2013. – С. 119-124.
3. Дегтярьова Н. В. Створення комплексних завдань для практичних робіт з інформатики: методичні рекомендації / Н.В. Дегтярьова – Суми: ВВП «Мрія-1», 2014. – 32 с.
4. Комаров М. Ю. Оцінювання навчальних досягнень учнів за 12-бальною шкалою в процесі вивчення основ алгоритмізації і програмування / М. Ю. Комаров // Комп’ютер в школі ісім’ї – 2001. – № 3. – С. 16-20.
5. Копняк Н. Б. Методика оцінювання результатів навчання інформатики учнів старших класів: дис. … канд. пед. наук. за спец. 13.00.02 / Н. Б. Копняк. – Київ, 2008 – 266с.
6. Крокер Л. Введение в классическу и современную теорию тестов:учебник / Л. Крокер, Д. Алгина. – М. : Логос, 2010. – 668 с.
7. Кузнецова І. В. Розвиток пізнавального інтересу і творчої активності учнів / І. В. Кузнецова // Комп’ютер в школі та сім’ї. – 2011. – №1. – С. 19-20.
8. Сохор А. М. Объяснение в процессе обучения: элементы дидактической концепции / А. М. Сохор. - М. : Просвещение, 1988. – 124 с.
9. Ухань П. С. Контроль знань, вмінь і навичок на уроках інформатики: дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / П. С. Ухань. – Київ, 2001. – 198 с.
10. Філіпенко І. І. Комплексний контроль і корекція навчальної діяльності студентів вищих технічних навчальних закладів у процесі навчання фізики: … дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / І. І. Філіпенко. – Запоріжжя, 2007. – 250 с.
11. Ward W. C. Construct validity of free-response and mashine-scorable and mashine-scorable forms of test / W. C.Ward, N. Fredericsen, S.B. Carlson // Journal of Education Measurement, 17. – 1980. – P. 11-29

12. Ward W. C. III-structured problems as multiple-choice items / W.C Ward, N Fredericsen., S.B. Carlson / W. C.Ward, N. Fredericsen, S.B. Carlson // GRE Board Professional Report, 1983. – No 81-18.

Анотація. **Дегтярьова Н. Особливості використання тестових запитань різних типів при вивченні інформатики в школі (на матеріалах дисертаційного дослідження).** В статті описано особливості застосування тестів різних типів. Тестування використовувалося як один з компонентів комплексного завдання, яке містило і практичну частину також. При різноманітті тестових завдань існують особливості їх типів застосування: як при створенні, так і при оцінюванні результатів.

Ключові слова: види тестових завдань, тестування, комплексні завдання, навчання інформатики, шкільний курс інформатики.

Abstract. Degtyareva N. Special aspects of different types of test questions in studying computer science in school (on materials of the research). The article describes the special aspects of the application tests of various types. Testing used as one component of a complex task that is contained and practical part as well. With the variety of tests are special aspects of application types, both in creating and in evaluating the results.

Keywords: types of tests, testing, complex tasks, learning science, high-school science.

Олена Завражна
доцент кафедри фізики та методики навчання фізики

НАНОТЕХНОЛОГІЇ ЯК ОДИН З ЧИННИКІВ ФОРМУВАННЯ МОТИВАЦІЇ УЧНІВ ДО ОТРИМАННЯ НОВИХ ЗНАНЬ З ФІЗИКИ

Розвиток сучасних технологій, таких як створення нових матеріалів (композитів, напівпровідників, оптичних волокон), електроніки та оптоелектроніки, заснованих на розробках в сфері нанотехнологій, використанні сонячної енергії, розвитку аерокосмічних, цифрових і біотехнологій йде дуже швидкими темпами [1-3].

У вжитку з'явилися нові слова: нанонаука, нанотехнологія, наноструктурні матеріали та об'єкти. Ними позначають пріоритетні напрями науково-технічної революції, які охоплюють цілі розділи сучасної науки: нові матеріали, напівпровідники, пристрої зберігання інформації, біотехнології, полімери, хімію, оптику та інші. Досягнення науки і високих технологій останньої чверті минулого століття переконливо продемонстрували, які величезні можливості обіцяє використання специфічних явищ і властивостей речовини в нанометровому діапазоні розмірів. Ключовими особливостями яких є сильна залежність будь-яких характеристик матеріалу від розмірів структури в наномасштабній області, здатність радикально змінити властивості речовини, а також явища самозбірки і самовпорядкування атомів і молекул на нанометрових відстанях, як це робить жива природа в біологічних об'єктах.

Нанотехнології розглядають як міждисциплінарну науку, але основний внесок у її розвиток вносить фізика. Саме на вчителя фізики покладається функція формування у суспільстві наукового світогляду через ознайомлення з досягненнями нанотехнологій та їх впливом на життя людства. Немає сумніву, що кожна сучасна людина повинна розуміти як в цілому побудований світ, який її оточує [4;5].

Світоглядну функцію фізика як навчальний предмет у середній школі повинна реалізувати незалежно від профілю навчання. Саме формування світогляду при вивченні фізики дає можливість учню у майбутньому краще розуміти процеси, які відбуваються у природі та адекватно реагувати і критично оцінювати інформацію про екологічні проблеми тощо. Від учителя залежить чи матимуть учні цілісне уявлення про навколишній світ. Під час своєї роботи учитель фізики проявляє суб’єктивне розуміння навколишньої дійсності, що впливає на формування світогляду школярів.

Аналіз наукової, методичної та навчальної літератури свідчить, що є певні проблеми у формуванні світогляду учня.

На жаль, вивчення сучасних напрямків у виробничій сфері і нанотехнологій не знайшло відображення в шкільних стандартах і програмах з фізики.

Сьогодні перед сучасним вчителем фізики стоїть завдання не тільки дати знання, які дозволять вирішити практичні завдання, а й сформувати у школярів технологічну грамотність, компетентність і створити умови для професійного самовизначення на сучасному ринку праці. Для цього школярі повинні отримати адекватні уявлення про області застосування нанотехнологій: медицина, фармацевтика, промислове виробництво, створення нових матеріалів, біотехнології і т.д.

Слід зазначити, що за останні роки намітилася тенденція зниження мотивації в учнів до вивчення фізичних основ і принципу дії різних конструкцій електроніки. Це, в свою чергу, сприяло формуванню у них тільки навичок «користувача» сучасної апаратури. Якщо вчитель на уроці дасть можливість учням познайомитися з сучасними науково-технічними досягненнями в області магнітних ефектів і матеріалів, то це сприяло б розвитку пізнавальної активності і позитивної мотивації учнів до отримання ними нового фізичного знання. Йдеться про нові ефекти в магнітних напівпровідниках і в магнітооптиці, але в основному – про властивості наноструктурних магнітних матеріалів (магнітне скло, суперпарамагнетизм, гігантські ефекти і т.п.).

Більшість електричних і електронних приладів засновані на принципі управління струмами електронів, а їх рух розглядається як рух частинок, що підкоряються законам класичної фізики. У порівнянні з атомними розмірами пристрої традиційної електроніки досить великі, однак з розвитком нанотехнологій виникають нові можливості створення перспективних приладів та пристроїв електронної техніки. Одна з цих можливостей пов'язана з тим, що електрон має спін- власний магнітний момент. При цьому електрон може перебувати в двох спінових станах, якими можна кодувати біти інформації. У перспективі управління спінові станами електронів дозволило б створити комп'ютерні компоненти з великою швидкодією, малим енергоспоживанням і великою інформаційною ємністю. Розділ електроніки, в якому при створенні електронних приладів і пристроїв поряд з зарядом електрона використовується його спін, отримав назву спінової електроніки, або «спінтроніки». Швидкий розвиток наноелектроніки є основою якісно нового етапу в розробці новітніх інформаційних технологій, нових засобів діагностики і зв'язку.

Таким чином, в світлі тотального розвитку наноіндустрії, необхідне коригування шкільної фізичної освіти, що призведе до підвищення ключових компетенцій учнів та формуванню інтересу до вивчення предметів природничого циклу в цілому.

Список використаних джерел

1. Стадник О.Д. Розвиток наноосвіти – один із чинників забезпечення переходу на шостий технологічний уклад / О.Д. Стадник, І.О. Мороз, Ю.О. Шкурдода, О.В. Яременко // Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Педагогічні науки: зб. наук. пр. – Вип.3. – Бердянськ, 2015. - с.324-330.
2. Ineke Malsch. Nano-education from a European perspective. // Journal of Physics: Conference Series 100 (2008) 032001.
3. Nyemchenko U.S. Comparing the Tribological Properties of the Coatings (Ti-Hf-Zr-V-Nb-Ta)N and (Ti-Hf-Zr-V-Nb-Ta)N + DLC / U.S. Nyemchenko, V.M. Beresnev, V.F. Gorban, V.Ju. Novikov, J.V. Yaremenko // Jornal of Nano-and Electronic Physics. – Vol.7 No 3, - 03041(4pp)(2015).
4. Завражна О.М. Підходи до вивчення нанотехнологій у загальноосвітніх навчальних закладах // О.М. Завражна, А.І. Салтикова / Сучасні тенденції навчання фізики у загальноосвітній та вищій школі: Матер. ІІ Міжнародної Інтернет-конференції присвяченої 120-річчю від дня народження Ігоря Євгеновича Тамма, м. Кіровоград, 15-16 жовтня 2015 р. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2015. – С. 22-24.
5. Лісниченко Я.В., Завражна О.М. Особливості довузівської підготовки в області нанотехнологій // Сучасні проблеми експериментальної, теоретичної фізики та методики навчання фізики: матеріали І

Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених, м. Суми, 15-16 квітня 2015 р.– Суми: СумДПУ, 2015. – С.60-61.

Анотація. Завражна О.М. Нанотехнології як один з чинників формування мотивації учнів до отримання нових знань з фізики. *Вивчення сучасних напрямків у виробничій сфері і нанотехнологій не знайшло відображення в шкільних стандартах і програмах з фізики. Отже, в світлі тотального розвитку наноіндустрії, необхідне коригування шкільної фізичної освіти, що призведе до підвищення ключових компетенцій учнів та формуванню інтересу до вивчення предметів природничого циклу в цілому.*

Ключові слова: *вивчення нанотехнологій, шкільні стандарти, наноіндустрія, мотивація, компетентність.*

Abstract: Zavrazhna E. M. Nanotechnology as a factor in the formation of motivation of students to acquire new knowledge of physics. *The study modern trends in production and nanotechnology are not reflected in school standards and programs in physics. So, in light of the total development of nanotechnology, necessary adjustment to school physical education, which will improve the core competencies of students and the formation of interest in the study of natural subjects in general.*

Keywords: *study nanotechnology, school standards, nanotechnology, motivation, competence.*

В.С. Іваній
професор кафедри фізики та методики навчання фізики

СИСТЕМА КОНТРОЛЮ РІВНЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕННЯ УЧНІВ І КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗА ЕЛЕКТИВНИЙ КУРС

Курси за вибором не мають стандартів, а отже не повинні піддаватися підсумковій атестації. Зміст і правила засвоєння їх програми загальноосвітній навчальний заклад встановлює самостійно.

Важливим елементом навчальної програми елективного курсу є можливість визначення очікуваних результатів після вивчення курсу, а також способів їх діагностики та оцінки. Очікуваний результат вивчення курсу означає знаходження відповідей на питання: які будуть отримані знання, вміння, досвід, необхідні для побудови індивідуальної освітньої траєкторії в школі та в майбутньому; які види діяльності виявляться освоєними, які цінності будуть запропоновані для засвоєння.

Результати занять елективного курсу мають дві складові: освітню та особистісну (особистісні якості, що сприяють освоєнню різних способів діяльності, формуванню вміння здобувати самостійно знання і користуватися ними, мотивації, підвищенню пізнавальної активності). Предметом контролю та оцінки є освітні продукти учнів, а також їх сформовані особистісні якості.

Результати навчання повинні бути значущими в першу чергу для самих учнів, вони можуть бути сформульовані так: "учень повинен знати (мати уявлення), вміти, мати досвід". У термінах компетентностей це включає роботу в групі, роботу з інформацією, рішення проблем, при цьому необхідно описати рівень досягнень учнів у кожній із зазначених областей діяльності після закінчення курсу.

Позитивним на наш погляд, є оцінювання дитини у форматі доброго ставлення до її особистості. Першою заповіддю навчання К. Д. Ушинський вважав необхідність у вченні дати дітям радість праці, успіху, пробудити в їхніх серцях почуття гордості і власної гідності за свої досягнення. Правильне оцінювання досягнень учня створює ситуацію успіху і сприяє активізації пізнавальної діяльності.

Перевірка освітніх продуктів, отриманих на заняттях елективних курсів, проводиться в наступних формах:

- первинна діагностика можливостей дитини у вивченні курсу, мотивації вибору даного напрямку, з метою побудови індивідуальної освітньої траєкторії учня;
- поточний рефлексивний самоаналіз, контроль і самооцінка учнями виконуваних завдань. Взаємооцінка учнями робіт один одного, або робіт, виконаних в групах;
- публічний захист виконаних учнями творчих робіт (індивідуальних і групових);
- поточна діагностика і оцінка вчителем діяльності школярів;
- підсумкова оцінка діяльності та освітніх продуктів учня відповідно до його індивідуальної освітньої програми за курс.

Система оцінювання може бути бальна і рейтингова (диференційована, тестова, залікова, захист проектних робіт і рефератів тощо).

Традиційна 12-бальна система оцінювання побудована з урахуванням підвищення рівня особистих досягнень учня. Передбачено, що при оцінюванні вчитель має враховувати рівень досягнень учня, а не ступінь його невдач. Критерії оцінювання ґрунтуються на позитивному принципі, за якого оцінки не поділяються на ті, що виконують заохочувальну і каральну функції. Ці Критерії визначають загальні підходи до визначення рівня навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти та встановлюють відповідність між вимогами до знань, умінь і навичок учнів та показником оцінки в балах відповідно до рівнів навчальних досягнень.

Критерії 12-бальної системи оцінювання реалізуються в нормах чотирьох рівнів досягнень:

I. Початковий – ідповідь учня фрагментарна, характеризується початковими уявленнями про предмет вивчення;

II. Середній – учень відтворює основний навчальний матеріал, виконує завдання за зразком, володіє елементарними вміннями навчальної діяльності;

III. Достатній – учень знає істотні ознаки понять, явищ, зв'язки між ними, вміє пояснити основні закономірності, а також самостійно застосовує знання в стандартних ситуаціях, володіє розумовими операціями (аналізом, абстрагуванням, узагальненням тощо), вміє робити висновки, виправляти допущені помилки. Відповідь учня (учениці) правильна, логічна, обґрунтована, хоча у ній бракує власних суджень;

IV. Високий – знання учня є глибокими, міцними, системними; учень вміє застосовувати їх для виконання творчих завдань, його навчальна діяльність позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію [1].

При визначенні рівня навчальних досягнень учнів враховуються:

– характеристики відповіді: правильність, логічність, обґрунтованість, цілісність;

– якість знань;

– сформованість загальнонавчальних та предметних умінь і навичок;

– рівень володіння розумовими операціями: вміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, класифікувати, узагальнювати, робити висновки тощо;

– вміння виявляти проблеми та розв'язувати їх, формулювати гіпотези;

– самостійність оцінних суджень [1].

Навчальний заклад може використовувати рейтингову системи оцінювання навчальних досягнень учнів за погодженням з місцевими органами управління освітою [2]. При цьому оцінки за елективні курси переводяться у бали відповідно до Критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти .

Рейтингова система оцінювання сприяє формуванню ключових компетентностей і створює можливості для:

– підвищення мотивації учнів до самонавчання та самооцінювання;

– розширення можливості в індивідуальній підготовленості учнів на кожному етапі навчального процесу;

– підвищення об'єктивності оцінювання не лише протягом навчального року, а й за весь період навчання;

– градації значущості балів, які отримують учні за виконання різних видів робіт (самостійна робота, підсумкова робота, творча робота, виставки, конкурси творчих робіт, науково-дослідні й художні проекти, тощо).

Дана система передбачає послідовне проходження ряду етапів:

– визначення переліку оцінюваних видів навчальної діяльності;
– розробка системи оцінок;
– розробка системи «штрафних очок» за невиконання учбових завдань.

З рейтинговою системою оцінювання добре поєднуються такі способи контролю рівня досягнень учнів:

– спостереження активності на занятті;
– бесіда з учнями, батьками;
– експертні оцінки педагогів з інших предметів;
– аналіз творчих дослідницьких робіт, результатів виконання діагностичних завдань;
– анкетування та тестування;
– метод портфоліо.

Портфоліо – це накопичувальна система оцінювання, що передбачає формування уміння учнів ставити цілі, планувати і організовувати власну навчальну діяльність; накопичення різних видів робіт, які засвідчують рух в індивідуальному розвитку; активну участь в інтеграції кількісних і якісних оцінок; підвищення ролі самооцінки [1].

Таке оцінювання передбачає визначення критеріїв для включення учнівських напрацювань до портфоліо; форми подання матеріалу; сплanованість оцінного процесу; елементи самооцінки з боку учня тощо.

Система діагностики і оцінювання має стимулювати прагнення до особистісного зростання і професійного самовизначення [3].

Отже, на сьогодні система контролю рівня досягнення учнів і критерії оцінок за елективний курс ще вимагають обмірковування. Проте найбільш доцільними є 12-бальна і рейтингова системи оцінювання навчальних досягнень учнів. Важливо використовувати оцінку проміжних досягнень, передусім як інструмент позитивної мотивації, а також своєчасної корекції діяльності як учнів, так і вчителя. При цьому необхідно пам'ятати, що курс вибраний учнем ініціативно; успішне його освоєння може допомогти учневі відчути себе успішним.

Література

1. Наказ Міністерства освіти і науки молоді та спорту України №329 від 13.04.2011 "Про затвердження Критеріїв оцінювання навчальних

досягнень учнів (вихованців) у системі загальної середньої освіти".

2. Положення «Про елективні курси допрофільної підготовки та профільного навчання учнів» від 20.03.2007р. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://yarmolrmk.at.ua/doc/elektuvn_kyrsu.doc

3. Савицька, О. С. Особливості впровадження елективних курсів в систему профільної технологічної освіти / О.С. Савицька // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 5 «Педагогічні науки: реалії та перспективи». – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – Вип. 31. – С. 217–222.

Федір Лиман,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри математики
mathematicsspu@mail.ru
Тетяна Лукашова,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики
tanya.lukashova2015@gmail.com
Марина Друшляк,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики
marydru@mail.ru

УЗАГАЛЬНЕНІ НОРМИ В ГРУПАХ

Вступ. У теорії груп особливе місце займають результати, що стосуються вивчення характеристичних підгруп (зокрема, центра, комутанта, підгрупи Фраттіні тощо), а також впливу властивостей цих підгруп на структуру самої групи. У наш час список таких характеристичних підгруп у значній мірі може бути поповнений за рахунок різноманітних Σ-норм групи.

Нехай Σ – система усіх підгруп групи, що мають певну теоретико-групову властивість. Наприкла, Σ може складатися з усіх підгруп групи, усіх циклічних, усіх нециклічних, усіх абелевих, усіх неабелевих, усіх субнормальних, усіх максимальних, усіх нескінченних, усіх максимальних підгруп групи тощо. Σ*-нормою групи* G назвемо перетин $N_{\Sigma}(G)$ нормалізаторів усіх підгруп групи, що належать системі Σ. У випадку $\Sigma = \varnothing$ будемо вважати, що $G = N_{\Sigma}(G)$.

З означення Σ-норми випливає, що вона є характеристичною підгрупою групи та містить центр групи. Окрім того, $N_{\Sigma}(G)$ є максимальною підгрупою групи, що нормалізує усі Σ-підгрупи групи. Тому усі підгрупи Σ-норми, що належать системі Σ, є нормальними в $N_{\Sigma}(G)$ (хоча таких підгруп може й не бути).

При розгляді Σ-норм постає ряд проблем, пов'язаних із дослідженням властивостей групи при заданій системі підгруп Σ і певних обмеженнях, яким задовольняє Σ-норма. Конкретні задачі такого роду розв'язувались багатьма алгебраїстами в залежності від вибору системи Σ та властивостей самої Σ-норми.

Знаючи будову Σ-норми, природу її вкладення у групу, у багатьох випадках можна охарактеризувати властивості самої групи. Наприклад, якщо Σ-норма збігається з групою і $\Sigma \neq \varnothing$, то у групі нормальними є усі підгрупи з системи Σ. Уперше неабелеві групи з такою властивістю були розглянуті наприкінці XIX століття Р. Дедекіндом [1], який дав повний опис скінченних неабелевих груп, усі підгрупи яких нормальні, і назвав їх *гамільтоновими групами*. Нескінченні гамільтонові групи були описані у 1933 році Р. Бером [2]. Об'єднання множин абелевих і гамільтонових груп у наш час називають множиною *дедекіндових груп*.

Проте, дослідження груп з іншими системами нормальних підгруп Σ були продовжені лише у другій половині XX століття, що певним чином пригальмувало вивчення самих Σ-норм. До таких досліджень відносяться, перш за все, дослідження С. М. Чернікова та його учнів. Отже, у наш час для багатьох систем підгруп Σ будова груп, що збігаються з нормою $N_{\Sigma}(G)$, відома. Тому природно було постає питання про вивчення властивостей груп, в яких Σ-норма є власною підгрупою.

1. Норма групи та близькі до неї підгрупи

Уперше задача дослідження властивостей груп, що мають Σ-норму, відмінну від самої групи, була сформульована Р. Бером ще у 30-х роках минулого століття. У роботі [3] він увів до розгляду підгрупу $N(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх підгруп групи і назвав її *нормою групи G*. Зрозуміло, що норма $N(G)$ є Σ-нормою групи для системи Σ, що складається з усіх підгруп групи. Норма $N(G)$ міститься в усіх інших Σ-нормах, а їх у свою чергу можна вважати її узагальненнями. Зрозуміло також, що дедекіндові групи збігаються зі своїми нормами, тому індекс норми у групі може слугувати певною «мірою» дедекіндовості групи.

Норма групи вивчалась як самим Р. Бером [3-10], так і рядом інших авторів [9-28]. Р. Бером було помічено, що обмеження, які накладаються на норму групи, певним чином впливають і на будову самої групи. Зокрема, має місце твердження.

Твердження 1.1. ([3]). *Якщо норма N(G) групи G гамільтонова, то мають місце наступні твердження:*

1) G – періодична група;

2) G не містить елементів, порядок яких ділиться на 8;

3) усі елементи групи G, що мають порядок кратний 4, можна подати у вигляді za, де $a \in N(G)$, $|a| = 4$ *і* $z \in G$, *причому z переставний з кожним елементом норми N(G);*

4) будь-який елемент, порядок якого не ділиться на 4, переставний з кожним елементом підгрупи N(G).

Вивчаючи зв'язки між нормою та центром групи, Р. Бер показав, що норма збігається з центром групи, якщо вона містить елементи нескінченного порядку [3]. Ще один важливий результат, що характеризує вплив центра групи на її норму було встановлено у [10].

Твердження 1.2. ([10]). *Норма групи є одиничною підгрупою тоді і тільки тоді, коли G є групою без центра.*

Продовжуючи вивчення властивостей норми групи, Л. Уосом [11] було встановлено, що норма *N(G)* міститься в третьому гіперцентрі групи, а група автоморфізмів, яку індукує *G* на підгрупі *N(G),* нільпотентна класу не вище *2*. Окрім того, було доведено, що норма групи міститься в другому гіперцентрі тоді і тільки тоді, коли група автоморфізмів, індукованих на *N(G)* групою *G,* комутативна. Цей результат було суттєво уточнено Е. Шенкманом у [12].

Твердження 1.3. ([12]) *Норма N(G) групи G міститься у другому гіперцентрі G. При цьому комутант групи є підгрупою централізатора норми N(G) у G.*

Отже, група автоморфізмів, яку індукує *G* на *N(G),* абелева. Зазначимо також, що з твердження 1.3 безпосередньо випливає той факт, що у групах без центра *N(G)=E.*

У роботах [6,8] розглядалися властивості періодичних груп, що мають абелеву фактор-групу за нормою $N(G)$. Зокрема, у [6] було доведено, що періодична група *G*, в якій фактор-група *G/N(G)* абелева і $N(G)\neq Z(G)$, є прямим добутком своїх примарних компонент, а її норма *N(G)* – прямим добутком норм цих компонент.

У зв'язку з цим зауважимо, що на відміну від деяких інших характеристичних підгруп (центра групи, її комутанта, підгрупи Фіттінга та інших), норма прямого добутку довільних підгруп, взагалі кажучи, не дорівнює прямому добутку норм відповідних компонент.

Приклад 1.1. Нехай $G = Q \times B$, де B – неперіодична абелева група рангу 1, Q – група кватерніонів порядку 8. У цій групі

$$N(G) = N(Q \times B) = Q^2 \times B \neq N(Q) \times N(B) = G.$$

Питання знаходження норм прямих добутків груп вивчалося Дж. Еваном у [13].

Відзначимо також наступний результат Р. Бера, що характеризує властивості p-груп, які мають абелеву фактор-групу за нормою.

Твердження 1.4. ([8]) *Якщо G - p-група* $(p \neq 2,\ p \neq 3)$*, яка має абелеву фактор-групу за нормою N(G), причому* $N(G) \neq Z(G)$ *і* p^r *- експонента групи* $C_G(N(G))$*, то:*

1) G – група скінченної експоненти;

2) N(G)/ Z(G) - циклічна група, порядок якої дорівнює експоненті групи автоморфізмів, що індукує G на N(G).

3) централізатор $C_G(N(G))$ *складається з тих і тільки тих елементів* $x \in G$*, для яких* $x^{p^r} = 1$.

Обмеження $p \neq 2,\ p \neq 3$ у твердженні 1.4 є істотними, про що свідчать приклади відповідних груп (див. [6]).

У останні роки інтерес до норми *N(G)* групи не зменшується, про що свідчить цілий ряд робіт [13-31], присвячених дослідженню її властивостей. Зокрема, у роботах [17, 18] Р. Брайсом та Дж. Коссі було розглянуто ряди норм

$$1 = N_0(G) \subseteq N_1(G) \subseteq \ldots \subseteq N_i(G) \subseteq \ldots,$$

де $N_i(G)/N_{i-1}(G) = N(G/N_{i-1}(G))$ *для* $i \geq 1$.

Було встановлено, що у класі 2-груп з гамільтоновості фактор-групи $N_{i+1}(G)/N_i(G)$ випливає рівність $N_{i+1}(G) = G$. Більш того, скінченна 2-група, у якій фактор-група $G/N(G)$ гамільтонова, проте жоден з факторів $N_i(G)/N_{i-1}(G)$ не є гамільтоновим, має порядок 2^7 і визначається однозначно з точністю до ізоморфізма [18].

Починаючи від робіт Бера, Уоса і Шенкмана, значна частина досліджень норми *N(G)* стосувалася її зв'язків із центром групи. Зокрема, у роботі [19] Дж. Байдлеманом, Г. Хайнекеном та М. Нюеллом було доведено, що в довільній p-групі G або фактор-група $G/Z(G)$, або група $[G, N(G)]$ є циклічними. У цій же роботі розглядалося питання впливу властивостей норми групи та її центра на сприйнятливість групи G.

Група G називається *сприйнятливою,* якщо вона є групою внутрішніх автоморфізмів деякої групи H, тобто $G \cong H/Z(H)$. Такі групи уперше почав вивчати Р. Бер [29], який охарактеризував сприйнятливі скінченно породжені абелеві групи виду $G = Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \ldots \oplus Z_{n_k}$, де $n_{i+1} \vdots n_i,\ n_i \in N \cup \{0\}$, а $Z_{n_i} = Z$ – нескінченна циклічна група при $n_i = 0$. Було встановлено, що група G сприйнятлива тоді і тільки тоді, коли $k \geq 2$ і $n_{k-1} = n_k$. Характеризація Бера залишається єдиною повною і завершеною для певного класу сприйнятливих груп і до сьогодні.

Продовжуючи дослідження норми групи у сприйнятливих групах, у 2012 році К. Го та К. Жаном [20] було встановлено необхідні та достатні умови співпадання норми групи з її центром, а також досліджено властивості норми *N(G)* у класі нільпотентних груп із циклічним комутантом.

У 2005 році Н. Гавіолі, Л. Легаррета, С. Сіка, М. Тота [22] розглядали зв'язки між центром *Z(G)*, нормою *N(G)* та другим гіперцентром $Z_2(G)$ залежно від числа $v(G)$ класів спряжених ненормальних підгруп та числа $w(G)$ класів спряжених підгруп таких, що є нормалізаторами деяких підгруп, у скінченних *p*-групах ($p \neq 2$) класу нільпотентності *c*.

У 2008 році Ф. Руссо [23] досліджував зв'язки між центром *Z(G)*, нормою *N(G)*, квазіцентром $Q(G)$ та гіперквазіцентром $Q^*(G)$ груп, скінченних над квазіцентром. Нагадаємо, що *квазіцентром* $Q(G)$ групи G називається підгрупа, породжена всіма елементами *x* групи G такими, що підгрупа $\langle x \rangle$ переставна в групі G (з іншими підгрупами). Відповідно, *гіперквазіцентром* $Q^*(G)$ групи G називається найбільший член ланцюга нормальних підгруп

$$E = Q_0(G) \le Q_1(G) = Q(G) \le \ldots \le Q_\alpha \le Q_{\alpha+1} \le \ldots,$$

де α – порядкове число і $Q_{\alpha+1}(G)/Q_\alpha(G) = Q(G/Q_\alpha(G))$.

Твердження 1.5. [23, proposition 3.2, p.306] *Let G be a quasicentral-by-finite group, Q(G) be the quasicenter of G, N(G) be the norm of G.*

1) if Q(G) contains only elements of prime or infinite order and $Q(G) = N'$, *where N is the subgroup generated by the quasicentral elements of infinite order, then G is finite;*

2) if there is an element $x \in N(G)$ *such that the index* $\left|Q(G) : \langle x \rangle_G\right|$ *is finite, then G is central-by-finite;*

3) G is central-by-finite if and only if the index $\left|Q(G) : N(G)\right|$ *is finite.*

Зв'язки між нормою *N(G)* та центром *Z(G)* у класі скінченних груп вивчалися також І. В. Лемешевим у [24]. Отримані ним результати доповнюють результати Бера для скінченних груп.

Досить плідними виявились дослідження скінченних груп, в яких норма Бера має певний індекс. Зокрема, у роботі [25] Дж. Ваном та С. Го досліджувалися скінченні *p*-групи, в яких норма має простий індекс, а в [26] – скінченні групи, в яких норма є підгрупою індексу p або pq, де p і q – різні прості числа. Дж. Сміт [27] вивчав групи, в яких кожна підгрупа норми нормальна в групі.

Оскільки підгрупи довільної групи можна розглядати як елементи деякої структури підгруп $L(G)$ відносно операцій об'єднання та перетину, що впорядковані за включенням, то у такому сенсі норму $N(G)$ групи можна визначити наступним чином [30]:

$$N(G) = \bigcap_{X \in L(G)} N_G(X).$$

У цьому контексті у [28] було досліджено зв'язок між нециклічністю норми *N(G)*, з одного боку, та структурою $L(G)$ підгруп групи G і узагальненим ступенем комутативності групи G, з іншого.

Виникає природне питання: чому, враховуючи просте означення норми та її важливість при вивченні груп, ця характеристична підгрупа, на відміну від центра та комутанта, не отримала належної уваги на етапі раннього розвитку теорії груп. Г. Міллер [31] пояснює це тим, що у той час перед алгеброю стояли інші завдання і основна увага теорії груп була спрямована на дослідження розв'язків алгебраїчних рівнянь (в цьому напрямку досліджень фундаментальну роль відіграють прості групи, в той час як норма простої групи складеного порядку одинична). Норма не відігравала важливої ролі й при вивченні груп підстановок малих степенів, які використовувалися у той час у теорії алгебраїчних рівнянь. Найменший степінь групи підстановок, для якої існує норма простого індексу, дорівнює 8, до того ж тільки одна з 200 груп цього порядку має норму простого індексу. І, мабуть, саме з цих причин лише в 1934 році Р.Бер звернув увагу на цю характеристичну підгрупу.

Розглядаючи перетини нормалізаторів окремих підгруп групи, можна отримати підгрупи, у тій чи іншій мірі пов'язані з нормою Бера. До них можна віднести перетини нормалізаторів усіх підгруп, що містяться у виділеній підгрупі [32-34], або, навпаки, перетини нормалізаторів, що містять цю підгрупу [35]. Зокрема, близьким до поняття норми $N(G)$ групи G є введене І. Я. Субботіним поняття інваріатора $I_G(A)$ підгрупи A в групі G.

Інваріатором $I_G(A)$ підгрупи A у групі G [32] (*квазіцентралізатором* [34]) називається перетин нормалізаторів в G всіх підгруп групи A. Таку підгрупу можна також назвати нормою підгрупи A в групі G [36]. У випадку, коли підгрупа A збігається з усією групою G, інваріатор $I_G(G)$ – це в точності норма $N(G)$ групи G.

У 2001 році М. Д. Фалко, Ф. Д. Джованні, С. Музелла [35] ввели поняття *H*-норми групи G для деякої підгрупи *H* групи G. *H-нормою* групи G називається підгрупа $\ker(G:H)$, що складається з усіх елементів таких, що нормалізують кожну підгрупу *X* з G, що містить *H*. Очевидно, що $H \le \ker(G:H) \le N_G(H)$, $\ker(G:H) \le \ker(G:K)$, якщо $H \le K \le G$. Зазначимо, що *E*-норма, де *E* – одинична підгрупа групи G, збігається з нормою $N(G)$ групи G.

Зрозуміло, що норму $N(G)$ можна визначити як підгрупу групи G, що складається з усіх елементів даної групи, які нормалізують кожну підгрупу в *G*. Замінивши умову нормальності на пронормальність, отримаємо у деякій мірі аналог норми групи для пронормальності – так звану *пронорму* $P(G)$.

Нагадаємо, що елемент x групи G *пронормалізує підгрупу* H групи G, якщо підгрупи H та H^x спряжені в $\langle H, H^x \rangle$. Відповідно, *пронормою* $P(G)$ групи G називається множина всіх елементів групи G, що пронормалізують кожну підгрупу групи. Уперше поняття пронорми $P(G)$ групи було введене Ф. Джованні, Ж. Вінцензі [37] у 2000 році.

На відміну від норми групи пронорма не завжди є підгрупою групи. У роботі [38] було досліджено деякі класи груп, у яких множина усіх елементів групи G, що пронормалізують кожну підгрупу групи утворює підгрупу.

Твердження 1.6. ([37]) *Якщо* G*.– поліциклічна група, то її пронорма* $P(G)$ *є підгрупою.*

У цій же роботі доведено аналогічне твердження для класу локально розв'язних FC-груп.

У деяких дослідженнях, що стосуються груп з обмеженнями на нормалізатори вибраних систем підгруп, розглядаються підгрупи, породжені нормалізаторами вибраних підгруп. У цьому контексті відзначимо роботу Дж. Сміта [39], який вивчав підгрупу $R = R(G)$, породжену всіма власними нормалізаторами, і назвав її *конормою групи*. Якщо в групі G немає власних нормалізаторів, то група G дедекіндова і $R(G) = E$.

У 1990 році Х. Белл, Ф. Гузман, Л.-Ш. Каппе [40] досліджували так зване ядро Бера, що є аналогом норми групи для кілець. *Ядром Бера* кільця K називається множина

$$B(K) = \{a \in K \mid \forall y \in K, \exists r, s \in N (ay = y^r a \wedge ya = ay^s)\}.$$

У 2010 році М. Р. Діксон, Л. А. Курдаченко, Д. Отал використовували так звану норму підпростору в лінійних групах при дослідженні лінійних груп з орбітами скінченних розмірностей [41].

Нехай A – векторний простір над полем F, $GL(F, A)$ – група всіх автоморфізмів простору A, G – підгрупа групи $GL(F, A)$, B – підпростір простору A. *Нормою підпростору* B *в групі* G називається перетин нормалізаторів усіх F-підпросторів в B:

$$Norm_G(B) = \bigcap_{b \in B} N_G(bF).$$

Відомо, що у випадку, коли група G збігається з нормою $Norm_G(B)$, то група G ізоморфна підгрупі мультиплікативної групи $U(F)$. Якщо група G має орбіти скінченних розмірностей над A, то A містить FG-підмодуль D скінченної розмірності $\dim_F(D)$, і якщо $K = C_G(D)$, то $K \le Norm_G(A/D)$. У випадку, коли G-орбіти кожного підпростору з A є скінченними, A містить FG-підмодуль B такий, що $\dim_F(A/B)$ і $|G : Norm_G(B)|$ також скінченні.

Отже, дослідження, присвячені вивченню норми групи та близьких до неї підгруп, складають досить важливий та цікавий напрямок у теорії груп. В той же час існує досить багато питань щодо структурних характеристик групи залежно від будови її норми, щодо умов співпадання норми групи та її центра тощо.

2. Узагальнені норми деяких систем максимальних та субнормальних підгруп

Як зазначалося вище, норма *N(G)* є Σ-нормою групи, в якій у якості системи Σ обирається система усіх підгруп даної групи. Звужуючи систему усіх підгруп, наприклад, до системи усіх абелевих чи усіх максимальних підгруп групи, будемо отримувати нові Σ-норми, які можна розглядати як узагальнення норми *N(G)*.

Перші узагальнення такого роду з’явилися ще у 50-х роках ХХ століття. Зокрема, у 1953 році Р. Бер [42] розглядав перетин $H(G)$ нормалізаторів усіх силовських підгруп групи G і назвав цей перетин *гіперцентром групи* G. Зрозуміло, що гіперцентр $H(G)$ є Σ-нормою, де система Σ складається з усіх силовських підгруп групи. Р.Бер довів, що $H(G)$ збігається з перетином усіх її максимальних нільпотентних підгруп, а фактор-група $G/H(G)$ є групою без центра. Окрім того, було встановлено, що нормальна підгрупа належить гіперцентру тоді і тільки тоді, коли її елементи порядку p^n породжують циклічні підгрупи індекса p^n.

У 1968 році Б. Хупперт [43] узагальнив поняття гіперцентра, ввівши до розгляду поняття *$\mathfrak{F}$-гіперцентра*. Нехай $\mathfrak{F}$ – клас скінченних груп, які можна подати у вигляді прямого добутку своїх холлівських π-підгруп відносно деякого розбиття непорожньої множини π простих чисел. Даний клас є локальною формацією. Головний фактор H/K групи G називається $\mathfrak{F}$-центральним [44], якщо $H/K\lambda(G/C_G(H/K))\in \mathfrak{F}$. Добуток всіх нормальних підгруп з G, в яких G-головні фактори є $\mathfrak{F}$-центральними в G називається $\mathfrak{F}$-гіперцентром $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ групи G [45]. У 2013 році В. І. Мурашка [46], досліджуючи властивості $\mathfrak{F}$-гіперцентра, отримав в окремих випадках як наслідки деякі результати Бера про норму групи.

До вказаних узагальнень норми групи можна також віднести так звану *А-норму* групи $N_A(G)$ – перетин нормалізаторів усіх максимальних абелевих підгруп, – яку у 1961 році увів до розгляду В. Каппе [47]. Виявилось (див. [47]), що у скінченній групі *А*-норма є підгрупою, кожен елемент якої переставний зі своїми спряженими (такі групи вивчалися, зокрема, у роботі Леві [48]). Окрім того, з’ясувалось, що *А*-норма є близькою до підгрупи правих енгелевих елементів довжини 2, що дозволило використати її у дослідженні енгелевих груп.

Нагадаємо, (див., наприклад, [49, с. 541], що елемент $x \in G$ називається *правим енгелевим елементом довжини 2*, якщо для довільного елемента $g \in G$ має місце співвідношення

$$[[x, g], g] = 1.$$

Позначимо *R(G)* підгрупу групи *G*, породжену всіма правими енгелевими елементами довжини *2* групи *G*. Мають місце твердження.

Твердження 2.1. ([47]). *A-норма $N_A(G)$ групи G містить другий гіперцентр групи G та міститься у підгрупі R(G). При цьому фактор-група $R(G)/N_A(G)$ елементарна абелева експоненти не вище 2.*

Твердження 2.2. ([47]) *Для елемента $x \in G$, порядок якого не ділиться на 2, наступні твердження еквівалентні:*

а) $x \in N_A(G)$;

б) x - правий енгелевий елемент довжини 2 у G;

в) якщо $\langle x \rangle \lhd G$ і U - група автоморфізмів, яку індукує G на $\langle x \rangle$, то x належить A-нормі групи $\langle x \rangle U$;

г) для будь-яких елементів $g, h \in G$ має місце рівність

$$[[x, g], h] = [[x, h], g]^{-1}.$$

Наступне твердження щодо *A*-норми є досить широким узагальненням результатів Уоса [11] і Шенкмана [12], отриманих для норми *N(G)* групи.

Твердження 2.3. ([47]) *Група G індукує на підгрупі $N_A(G)$ нільпотентну групу автоморфізмів. Клас нільпотентності останньої не перевищує 2.*

У подальшому В. Каппе [48-52] узагальнив поняття *A*-норми групи та увів до розгляду так звану *E-норму*, яку визначив як перетин нормалізаторів усіх максимальних підгруп групи із заданою теоретико-груповою властивістю *E*. Очевидно, що *E*-норма $N_E(G)$ містить норму *N(G)*, а перетин довільної підгрупи групи *G* з *E*-нормою групи міститься в *E*-нормі цієї підгрупи. До того ж $N_E(N_E(G))= N_E(G)$.

З поняттям *E*-норми пов'язана підгрупа $\Delta(G)$, яка вивчалася В. Гашюцем [53] і була визначена як перетин нормалізаторів усіх максимальних підгруп групи. Зрозуміло, що *підгрупу Гашюца* $\Delta(G)$ можна розглядати як *Σ*–норму групи для системи Σ, що складається з ненормальних в *G* максимальних підгруп. У [53] було встановлено, що $\Delta(G)$ нільпотентна і $\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$, де $\Phi(G)$ – підгрупа Фраттіні.

У 1958 році, вивчаючи властивості нормалізаторів субнормальних підгруп, Г. Віландт [54] ввів до розгляду підгрупу *W(G)*, що є перетином нормалізаторів усіх субнормальних підгруп групи. Зрозуміло, що *підгрупа Віландта W(G)* водночас є *нормою субнормальних підгруп* групи.

Цілком очевидно, що у нільпотентній групі субнормальна норма збігається з нормою *N(G)*. Окрім того, умова $G=W(G)$ еквівалентна тому, що усі субнормальні підгрупи групи є нормальними. За теоремою 13.3.7 [55] підгрупа Віландта *W(G)* містить будь-яку просту неабелеву субнормальну підгрупу групи *G*, а також кожну мінімальну нормальну підгрупу групи *G,* що задовольняє умову мінімальності для субнормальних підгруп. Тому в скінченній групі *G* підгрупа $W(G)$ неодинична [54].

Аналогічний результат для деяких класів нескінченних груп незалежно один від одного отримали Д. Робінсон [56] та Дж. Роузблед [57].

Твердження 2.4. ([56, 57]) *Якщо група G задовольняє умову мінімальності для субнормальних підгруп, то фактор-група* $G/W(G)$ *скінченна.*

Ці результати було узагальнено Дж. Коссі [58] для поліциклічних груп та встановлено, що такі групи мають скінченну фактор-групу $G/C_G(W(G))$

Підгрупа Віланда та її узагальнення активно вивчалися цілим рядом дослідників, зокрема: О. Кегелем [59], Дж. Коссі, Р. Брайсом [60-62], Р. Брендлом, Ф. Джованні, С. Франчіозі [63], А. Каміна [64], К. Касоло [65, 66], Е. Ормерод [67], С. Весереллом [68,69], К. Жаном та К. Го [70, 71].

У роботі [60] було встановлено, що у скінченно породженій майже розв'язній групі скінченного рангу субнормальна норма $W(G)$ міститься у *FC*-центрі. Окрім того, якщо норма $W(G)$ збігається з усією групою, то в останній нормальними є усі субнормальні підгрупи, тобто нормальність є транзитивним відношенням. Групи з такою властивістю вивчалися Д. Робінсоном в [72] і були названі *T-групами*. Якщо G – скінченна розв'язна *T*-група і G/L єдина максимальна нільпотентна фактор-група групи *G*, то фактор-група G/L – абелева або гамільтонова, а L– абелева група.

У 1989 році Дж. Коссі, Р. Брайс [60] ввели до розгляду *локальну підгрупу Віландта* $W^p(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх p'-досконалих субнормальних підгруп групи G. Нагадаємо, що p'-*досконалою* називається група, яка не має нетривіальних фактор-груп порядків взаємно простих з p.

У 1992 році К. Касоло [66] вивчав спеціальну підгрупу групи $W(G)$, яку назвав *сильною підгрупою Віландта* $\overline{W}(G)$, та визначив її як перетин централізаторів нільпотентних субнормальних фактор-груп групи G:

$$\overline{W}(G)=\{g\in G\,|\,[S,g]\le S^R \text{ for all } S<<G\},$$

де S^R – нільпотентний резидуал підгрупи S або найменша нормальна підгрупа N в S така, що фактор-група S/N нільпотентна. К. Касоло довів, що у скінченній групі сильна підгрупа Віландта $\overline{W}(G)$ нетривіальна. Зазначимо також, що вказану підгрупу також вивчав С. Весерелл [68, 69].

У 1990 році Р. Брайсом [62] було уведено ще одне узагальнення підгрупи Віландта – так звану *m-підгрупу Віландта* $U_m(G)$ групи G, що є перетином нормалізаторів усіх субнормальних підгруп групи G з дефектом не більше m для цілого $m \geq 1$ та досліджено полінільпотентну структуру скінченних розв'язних груп на мові m-довжини Віландта. При цьому широко використовувалось поняття m-ряду Віландта групи, який визначається наступним чином: для кожного натурального числа $m \geq 1$ $U_{m,0}(G) = E$; якщо $i \geq 1$, то $U_{m,i}(G)$ визначається з умови

$$U_{m,i}(G)/U_{m,i-1}(G) = U_m(G/U_{m,i-1}(G)).$$

Якщо для деякого цілого числа n має місце рівність $U_{m,n}(G) = G$, то таке мінімальне число n називається m-довжиною Віландта. Р. Брайс довів, що існують межі комутаторної довжини і довжини Фіттінга скінченних розв'язних груп на мові m-довжини Віландта ($m \geq 2$), а також визначив найкраще таке обмеження. Властивості *m-підгрупи Віландта* $U_m(G)$ вивчалися також у роботах К. Франчі [76, 77].

В 1995 році Дж. Байдлеманом, М. Діксоном, Д. Робінсоном [73, 74] було розглянуто ще одну Σ-норму групи – *узагальнену підгрупу Віландта* $IW(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх нескінченних субнормальних підгруп групи. Зрозуміло, що $IW(G)$ є характеристичною підгрупою та містить субнормальну норму $W(G)$. Якщо $G = IW(G)$, то в групі G нормальні всі нескінченні субнормальні підгрупи. Такі групи вивчалися Ф. Джованні, С. Франчіозі [75] і отримали назву *IT-груп*. В роботі [73] досліджується структура групи G за умови, що $IW(G) \neq W(G)$, а також структура фактор-групи $IW(G)/W(G)$.

У роботі [78] Ф. Марі, Ф. Джованні було введено нову Σ-норму, у якій систему Σ складають усі несубнормальні підгрупи групи. Цю норму *несубнормальних підгруп* групи автори позначили $W^*(G)$. Зрозуміло, що в групах з умовою $W^*(G) = G$ усі підгрупи є субнормальними. Більш того, якщо G – група зі скінченною кількістю нормалізаторів несубнормальних підгруп, то фактор-група $G/W^*(G)$ скінченна [78].

Серед робіт, присвячених дослідженню узагальнень підгрупи Віландта, відзначимо також роботу [79], в якій введено так звану *узагальнену N-підгрупу Віландта* $W_N(G)$, що складається з усіх елементів групи G, які нормалізують усі субнормальні підгрупи з N. Це нормальна підгрупа і в загальному випадку може відрізнятися від N.

Зрозуміло, що $W(G) \subseteq W_N(G)$, зокрема, $W(G) = W_N(G)$, якщо $N = G$, або $N = W(G)$, або N – єдина максимальна нормальна підгрупа. Якщо G є *T*-групою і N нормальна підгрупа в група в G, то $W_N(G) = G$. Наступний приклад підтверджує, що обернене твердження не має місця.

Приклад 2.1. [79] Нехай $G = D_8 = \langle x, y \rangle$, $x^8 = y^2 = (xy)^2 = 1$, $N_1 = \langle x^2 \rangle$, $N_2 = \langle x \rangle$, тоді $W_{N_1}(G) = W_{N_2}(G) = G$, але G не є *T*-групою.

3. Про узагальнені норми характеристичних підгруп групи

У наш час алгебраїсти звертаються увагу на узагальнення норми, коли в якості системи Σ обирається система певних характеристичних підгруп. У цьому контексті Ш. Лі та Ж. Шен [80-81] розглядали Σ-норму $D(G)$ скінченної групи, де в якості системи Σ обирали комутанти всіх підгруп групи. Автори встановили, що у випадку, коли $D(G)$ містить всі елементи простих порядків, група G є розв'язною з довжиною Фіттінга не більше 3. У випадку, коли $G = D(G)$, комутант G' нільпотентний, а G'' є групою, клас нільпотентності якої не більше 2.

Ціла низка досліджень, які проводяться у останній час, стосується норм різних систем резидуалів. Зокрема, Ж. Шен, В. Ши та Ж. Кван [82] досліджували норму $S(G)$ нільпотентних резидуалів всіх підгруп простого порядку. Було доведено, що якщо всі елементи простого порядку скінченної групи G містяться в нормі $S(G)$, то група G розв'язна. Л. Гон та К.Го [83] вивчали норму нільпотентних резидуалів всіх підгруп скінченної групи. Н. Су та Я. Ван [84] розглянули норму $D^{\mathfrak{F}}(G)$ $\mathfrak{F}$-резидуалів $G^{\mathfrak{F}}$ всіх підгруп групи G та норму $D_p{}^{\mathfrak{F}}(G)$ $H^{\mathfrak{F}}$ $O_{p'}(G)$ всіх підгруп H скінченної групи G, де $\mathfrak{F}$ – формація. Нагадаємо, що $\mathfrak{F}$-резидуал $G^{\mathfrak{F}}$ групи G – це найменша нормальна підгрупа N групи G така, що $G/N \in \mathfrak{F}$.

К. Чен та В. Го [85] ввели до розгляду $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$-норму $N_{\mathfrak{H},\mathfrak{F}}(G)$ групи G – перетин нормалізаторів добутків $\mathfrak{F}$-резидуалів всіх підгруп групи G та $\mathfrak{H}$-радикала групи G

$$N_{\mathfrak{H},\mathfrak{F}}(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G\,(H^{\mathfrak{F}}G_{\mathfrak{H}},$$

де $\mathfrak{H}$ – клас Фіттінга, $\mathfrak{F}$ – формація. Нагадаємо, що $\mathfrak{H}$-радикалом $G_{\mathfrak{H}}$ групи G називається максимальна нормальна $\mathfrak{H}$-підгрупа групи G.

Якщо $\mathfrak{H}=1$, то підгрупа $N_{1,\mathfrak{F}}(G)$ називається $\mathfrak{F}$-нормою $N_{\mathfrak{F}}(G)$ групи G і визначається як $N_{\mathfrak{F}}(G) = \bigcap\limits_{H \leq G} N_G\,(H^{\mathfrak{F}})$. Якщо $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi$, де $\mathfrak{S}_\pi$ – клас скінченних π-розв'язних груп, то підгрупа $N_{\mathfrak{S}_\pi,\mathfrak{F}}(G)$ називається $\pi\mathfrak{F}$-нормою $N_{\pi\mathfrak{F}}(G)$ групи G і визначається як $N_{\pi\mathfrak{F}}(G) = \bigcap\limits_{H \leq G} N_G\,(H^{\mathfrak{F}}O_\pi(G))$. К. Чен та В. Го досліджували властивості $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$-норми, зокрема, $\pi\mathfrak{F}$-норми скінченої групи G, а також зв'язки між π`$\mathfrak{F}$-нормою та $\pi\mathfrak{F}$-гіперцентром групи G.

В 2014 році А. Балістер-Болінше, Дж. Коссі, Л. Жан [86] запропонували узагальнити структуру Σ-норм, які резидуалз'явилися в останні роки. Автори визначають *С-норму* $kC(G)$ скінченної групи G як перетин нормалізаторів всіх підгруп групи G, які *не входять до класу С*

$$k_C(G) = \bigcap_{H \notin C} N_G(H)$$

за умови, що $k_C(G) = G$, якщо $G \in C$. При такому підході норму $N(G)$ Бера можна розуміти як норму $k_C(G)$, де C – клас груп порядку 1. Групи, для яких $k_C(G) = G$, автори називають C-дедекіндовими. У [86] описано структуру ненільпотентних C-дедекіндових груп для класу нільпотентних груп. Показано також, що ті групи, для яких C-норма не є гіперцентральною, мають досить чітку структуру. Авторами наведено класифікацію нільпотентних класів, замкнених відносно взяття підгруп, фактор-груп, прямих добутків груп взаємно простих порядків і показано, що відомі класифікації можуть бути виведені з даної.

Твердження 3.1. ([86]) *Якщо $k_C(G)$ містить нецентральний головний фактор групи G, то $k_C(G)$ містить тільки один нецентральний головний фактор (в головному ряді групи G по $k_C(G)$) і якщо p – простий дільник порядку цього головного фактора, то холлівська p'-підгрупа групи G є C-групою і G нільпотентна класу не більше 3.*

Наприкінці відзначимо також роботу Р. Лауе [87], який розглядав підгрупу, «близьку» до Σ-норми

$$A(\Sigma) = \bigcap_{X \in \Sigma} N_{Aut(G)}(X),$$

що складається з автоморфізмів, які нормалізують кожну підгрупу множини Σ-підгруп групи G.

4. Про узагальнені норми різних систем абелевих та нециклічних підгруп

Звуження системи Σ всіх підгруп групи G до системи усіх абелевих і навіть усіх циклічних підгруп, не приводить до розширення норми $N(G)$. Проте при виборі у якості Σ системи усіх нециклічних підгруп (за умови, що такі підгрупи в групі існують), відповідна Σ-норма (назвемо її *нормою нециклічних підгруп*) буде, взагалі кажучи, відмінною від норми $N(G)$. Можливість вивчати норму нециклічних підгруп дали дослідження Ф. М. Лимана [88-90], який отримав опис досить широких класів неабелевих груп, в яких нормальними будуть всі нециклічні підгрупи. Такі групи були названі $\overline{H}$*-групами* ($\overline{H_p}$*-групами* у випадку p-груп).

Поняття *нециклічної норми* N_G групи як перетину нормалізаторів усіх нециклічних підгруп групи було введене у 1997 році Ф. М. Лиманом у роботі [91], де досліджувалися нескінченні групи, нециклічна норма яких локально ступінчата і має скінченний індекс.

Твердження 4.1. ([91]) *У групі G нециклічна норма локально ступінчаста і має скінченний індекс тоді і тільки тоді, коли група G скінченна над центром.*

Окрім того, було встановлено, що за умови $1<|G/N_G|<\infty$ у класі нескінченних локально скінченних груп нециклічна норма N_G є дедекіндовою, а у класі неперіодичних майже локально розв'язних груп – абелевою підгрупою [91].

Дослідження нециклічної норми були продовжені Ф. М. Лиманом та Т. Д. Лукашовою у роботах [92-96], де охарактеризовано будову досить широких класів груп, нециклічна норма яких недедекіндова. У зв'язку з існуванням нескінченних груп О. Ю. Ольшанського [97], всі підгрупи яких циклічні і які водночас є нормами своїх нециклічних підгруп, періодичні групи розглядалися авторами за умови їх локальної скінченності. Зокрема, у [93] було доведено, що клас нескінченних локально скінченних p-груп ($p\neq 2$), що мають неабелеву нециклічну норму N_G, збігається з класом неабелевих p-груп, у яких усі нециклічні підгрупи нормальні. У той же час існують нескінченні локально скінченні 2-групи, що мають власну недедекіндову норму нециклічних підгруп. Будову локально скінченних p-груп (p- довільне просте число), в яких нециклічна норма недедекіндова повністю описано у роботах [92-94].

Твердження 4.2. ([92]) *Локально скінченні p-групи* ($p\neq 2$)*, що мають неабелеву нециклічну норму* N_G*, вичерпуються групами наступних типів:*

1) G – $\overline{H}_p$*-група,* $N_G=G$;

2) $G=(\langle x\rangle\times\langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle$, $|x|=p^n, n>1$, $|b|=|c|=p$, $[b,c]=x^{p^{n-1}}$, $[x,c]=x^{p^{n-1}\alpha}b^{\beta}$, $(\beta,p)=1$; $N_G=(\langle x^p\rangle\times\langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle$;

3) $G=\langle x\rangle\langle b\rangle, |x|=p^k, |b|=p^m, m>1, k\geq m+r, Z(G)=\langle x^{p^{r+1}}\rangle\times\langle b^{p^{r+1}}\rangle$, $1\leq r\leq m-1$, $[x,b]=x^{p^{k-r-1}s}b^{p^{m-1}t}$, $(s,p)=1$, $N_G=\langle x^{p^r}\rangle\lambda\langle b\rangle$.

Твердження 4.3. ([93,94]) *Локально скінченні 2-групи G з недедекіндовою нециклічною нормою* N_G *вичерпуються групами наступних типів:*

1) G – *негамільтонова* $\overline{H}_2$*-група,* $G=N_G$;

2) $G=(A\times\langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle\lambda\langle d\rangle$, A – *квазіциклічна 2-група,* $[A,\langle c\rangle]=1$, $|b|=|c|=|d|=2$, $d^{-1}ad=a^{-1}$ *для будь-якого елемента* $a\in A$, $[b,c]=[d,b]=[d,c]=a_1$, $a_1\in A$, $|a_1|=2$; $N_G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle$, *де* $a\in A$, $|a|=4$;

3) $G=(A\times H)\langle d\rangle$, *A – квазіциклічна 2-група,* $d^2=a_1\in A$, $|a_1|=2$, $d^{-1}ad=a^{-1}$ *для будь-якого елемента* $a\in A$, $H=\langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1|=|h_2|=4$, $h_1^2=h_2^2=[h_1,h_2]$, $[d,h_1]=a_1$, $[d,h_2]=1$; $N_G=\langle h_2\rangle\lambda\langle h_1a\rangle, |a|=4$, $a\in A$, $|a|=4$;

4) $G=(<x>\times<b>)\lambda<c>\lambda<d>$, $|x|=2^n, n>2, |b|=|c|=|d|=2$, $[x,c]=1$, $d^{-1}xd=x^{-1}$, $[b,c]=[d,b]=[d,c]=x^{2^{n-1}}$; $N_G=(<x^{2^{n-2}}>\times<b>)\lambda\langle c\rangle$,

5) $G=(<x>\lambda<b>)\lambda<c>$, $|x|=2^n$, $n>3, |b|=|c|=2, [x,c]=x^{\pm 2^{n-2}}b$, $[x,b]=x^{2^{n-1}}$; $N_G=(<x^2>\times<b>)\lambda<c>$;

6) $G=<x>\lambda H$, $|x|=2^n$, $n>2$, $H=<h_1,h_2>$, $|h_1|=|h_1|=4$, $h_1^2=h_2^2=[h_1,h_2]$, $[<x>,H]=<x^{2^{n-1}}>$; $N_G=<x^2>\times H$;

7) $G=(<x>\times H)<y>$, $|x|=2^n$, $n\geq 2$, $H=<h_1,h_2>$, $|h_1|=|h_1|=4$, $h_1^2=h_2^2=[h_1,h_2]$, $y^2=x^{2^{n-1}}$, $[y,h_2]=1$, $[y,h_1]=y^2$, $y^{-1}xy=x^{-1}$; $N_G=<h_2>\lambda<h_1x^{2^{n-2}}>$;

8) $G=\langle x\rangle\langle b\rangle, |x|=2^k, |b|=2^m, m\geq 1$; *якщо* $m=1$, *то* $k=3$, $[x,b]=x^2$ *і* $N_G=<x^2>\lambda<b>$; *якщо* $m>1$, *то* $k\geq m+r$, $1\leq r\leq m-1$, $Z(G)=<x^{2^{r+1}}>\times<b^{2^{r+1}}>$, $[x,b]=x^{2^{k-r-1}s}b^{2^{m-1}t}$, $0<s<2$, $0\leq t<2$, ($k>3$ *і* $t=0$ *при* $m=2$); $N_G=\left\langle x^{2^r}\right\rangle\lambda\langle b\rangle$.

Непримарні локально скінченні групи з недедекіндовою нециклічною нормою вивчалися у роботах [93,95]. Було встановлено, що нескінченні локально скінченні непримарні групи з вказаними обмеженнями на норму N_G є локально нільпотентними.

Твердження 4.4. ([93]) *Нескінченні локально скінченні непримарні групи, що мають недедекіндову нециклічну норму* N_G, *локально нільпотентні та вичерпуються групами типів:*

1) G *– нескінченна непримарна негамільтонова* $\overline{H}$*–група,* $G=N_G$;

2) $G=G_2\times\langle y\rangle$, G_2 *– група одного з типів 2) або 3) твердження 4.3,* $(|y|,2)=1$; $N_G=N_{G_2}\times\langle y\rangle$.

Отже, локально скінченна група, нециклічна норма N_G якої ненільпотентна, є скінченною.

Продовжуючи вивчення локально скінченних груп з недедекіндовою нециклічною нормою, у [95] було доведено, що за вказаних обмежень, скінченні нільпотентні групи вичерпуються групами виду

$$G=G_p\times\langle y\rangle,$$

де G_p– силовська p-підгрупа групи G, що є скінченною групою з нетривіальною нормою N_{G_p} та $(|y|,p)=1$. Окрім того, у класі локально скінченних груп з ненільпотентності нециклічної норми N_G випливає нормальність усіх нециклічних підгруп у групі.

Неперіодичні майже локально розв'язні групи з недедекіндовою нециклічною нормою розглядалися у роботі [96].

Твердження 4.5. ([96]) *Будь-яка неперіодична майже локально розв'язна група G, що має недедекіндову нециклічну норму* N_G*, є* $\overline{H}$ *-групою і* $G= N_G$.

Звернемо увагу на те, що за результатами робіт [92-96] локально скінченні або неперіодичні майже локально розв'язні групи з недедекіндовою нормою нециклічних підгруп розв'язні та ступінь їх розв'язності не перевищує 3.

Вивченням властивостей норми нециклічних підгруп N_G у класі скінченних груп та дослідженням її впливу на групу також займалися Ж. Шен, В. Ши, Дж. Жан [98-99]. Авторами було встановлено, що норма нециклічних підгруп скінченної групи розв'язна. Зауважимо, що це твердження є прямим наслідком з опису скінченних $\overline{H}$ -груп (див. [88-90]). Доведено також, що скінченна група є розв'язною, якщо всі її елементи простого порядку містяться у нормі N_G нециклічних підгруп. Окрім того, встановлено, що комутант групи нільпотентний, якщо усі елементи простого порядку чи порядку 4 з групи містяться у N_G [98].

Твердження 4.6.([98]) *Скінченна група має нільпотентний комутант тоді і тільки тоді, коли комутант фактор-групи за нормою* N_G *також є нільпотентним.*

Вивчення нескінченних груп з наперед заданими обмеженнями на нормалізатори різних систем нескінченних підгруп Σ тривалий час були і залишаються об'єктом багатьох теоретико-групових досліджень. Тому при розгляді нескінченних груп з обмеженнями на Σ-норми природньо у якості системи Σ вибрати одну із систем нескінченних підгруп.

У цьому контексті Ф. М. Лиманом та Т. Д. Лукашовою [96, 100-102] при дослідженні Σ-норм у нескінченних групах були розглянуто системи підгруп Σ, що складалися відповідно з усіх нескінченних, усіх нескінченних абелевих та усіх нескінченних циклічних підгруп за умови, що вказані системи підгруп непорожні. Отримані Σ-норми були позначені наступним чином: $N_G(\infty)$ *– норма нескінченних підгруп групи G;* $N_G(A_\infty)$ *– норма нескінченних абелевих підгруп групи G;* $N_G(C_\infty)$ *– норма нескінченних циклічних підгруп групи G.*

Якщо група G збігається з якоюсь із цих Σ-норм, то у ній нормальні усі Σ-підгрупи. Нескінченні неабелеві групи з властивістю $N_G(\infty)=G$ и $N_G(A_\infty)=G$ (за умови існування в них вказаних підгруп) вивчалися С. М. Черніковим [103-104] і названі відповідно *INH-групами* та *IH-групами.*

У якості обмежень, яким задовольняють вказані Σ-норми, розглядалася недедекіндовість відповідної Σ-норми або скінченність її індексу у групі. Наступне твердження дає достатні умови дедекіндовості кожної із вказаних норм.

Твердження 4.7. [100] *У неперіодичних групах норми нескінченних $N_G(\infty)$, нескінченних абелевих $N_G(A_\infty)$, нескінченних циклічних $N_G(C_\infty)$ підгруп є дедекіндовими у кожному з наступних випадків:*

a) *G – група без скруту або мішана група без інволюцій;*
b) *центр групи G містить елементи нескінченного порядку;*
c) *група G скінченна над центром;*
d) *вказані норми є скінченними;*
e) *група G містить підгрупу M з системи Σ, таку, що $M \bigcap N_G(\Sigma) = E$.*

Певний інтерес викликає питання взаємозв'язків між вказаними нормами у неперіодичних групах. З наведених вище означень випливає наступне співвідношення

$$Z(G) \subseteq N(G) \subseteq N_G(\infty) \subseteq N_G(A_\infty) \subseteq N_G(C_\infty).$$

Тому виникає природне питання: за яких умов вказані норми збігаються? Відповідь на нього (у термінах достатніх умов) дає наступне твердження.

Твердження 4.8. [100] *У неперіодичній групі G має місце рівність*

$$N(G) = N_G(\infty) = N_G(A_\infty) = N_G(C_\infty),$$

за умови, що виконується хоча б одне з тверджень:

a) *центр групи G містить елементи нескінченного порядку;*
b) *G – група без скруту;*
c) *група G скінченна над центром.*

Нескінченні групи з обмеженнями на норму $N_G(\infty)$ нескінченних підгруп вивчалися в [101]. Виявилось, що у неперіодичному випадку групи, в яких норма $N_G(\infty)$ має скінченний індекс, є мішаними і вичерпуються скінченними розширеннями своїх центрів.

Встановлено також, що норма нескінченних підгруп неперіодичної групи абелева і збігається з центром групи, якщо містить елементи нескінченного порядку. Цей результат узагальнює теорему Бера [10] про співпадання норми групи $N(G)$ та її центра у випадку неперіодичності $N(G)$. Щодо нескінченних локально скінченних груп, в яких норма $N_G(\infty)$ недедекіндова, то такі групи є скінченними розширенням квазіциклічної підгрупи, яка є повною частиною норми $N_G(\infty)$ [101].

Будову неперіодичних груп, в яких норма $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп є IH-групою, характеризує наступне твердження.

Твердження 4.9. ([96]) *Неперіодична група G тоді і тільки тоді має неабелеву норму $N_G(A_\infty)$ нескінченних абелевих підгруп, коли всі елементи нескінченного порядку групи G породжують нормальну абелеву підгрупу D, що містить кожну нескінченну абелеву підгрупу групи G, і існує* *елемент b порядку 2 або 4, такий що* $b^{-1}db = d^{-1}$ *для довільного елемента* $d \in D$. *При цьому* $N_G(A_\infty) = D\langle b \rangle$.

Природним узагальненням норми Бера для неперіодичних груп є норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп. Дослідження цієї норми та її впливу на властивості групи було розпочато Ф. М. Лиманом та Т. Д. Лукашовою у роботі [102]. Встановлено, що в групах без скруту норма $N_G(C_\infty)$ збігається з центром групи, і будь-яка скінченна над нормою $N_G(C_\infty)$ група без скруту абелева. Наступне твердження характеризує властивості групи, що має неабелеву норму $N_G(C_\infty)$.

Твердження 4.10. ([102]) *Неперіодична група G тоді і тільки тоді має неабелеву норму* $N_G(C_\infty)$, *коли всі елементи нескінченного порядку групи G породжують нормальну абелеву підгрупу A і існує елемент b порядку 2 або 4, такий що* $b^{-1}ab=a^{-1}$ *для довільного елемента* $a \in A$. *При цьому* $N_G(C_\infty)=A<b>$.

Слід звернути увагу, що з неабелевості норми $N_G(A_\infty)$ у неперіодичній групі випливає неабелевість норми $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп. Більш того, у цьому випадку $N_G(C_\infty)= N_G(A_\infty)$. Наступний приклад показує, що існують неперіодичні групи, в яких норма $N_G(C_\infty)$ неабелева, а норма $N_G(A_\infty)$ – абелева пігрупа.

Приклад 4.1. $G=<a> \lambda <b> \times C$, $|a|=\infty$, $|b|=2$, C – нескінченна елементарна абелева 2-група, $b^{-1}ab=a^{-1}$.

Неважко переконатись, що $N_G(A_\infty)=C$ – абелева група, $N_G(C_\infty)=G$ і $N_G(A_\infty) \neq N_G(C_\infty)$.

Наступне твердження характеризує умови, за яких норми $N_G(A_\infty)$ та $N_G(C_\infty)$ неперіодичної групи G збігаються (за умови, що підгрупа $N_G(C_\infty)$ неабелева).

Твердження 4.11. *Нехай G - неперіодична група, норма* $N_G(C_\infty)$ *нескінченних циклічних підгруп якої неабелева. Підгрупи* $N_G(C_\infty)$ *та* $N_G(A_\infty)$ *збігаються тоді і тільки тоді, коли* $N_G(C_\infty)$ *має скінченний центр та містить кожну нескінченну абелеву підгрупу групи G.*

У зв'язку з існуванням груп О. Ю. Ольшанського, періодичні групи з недедекіндовою нормою нескінченних абелевих підгруп вивчалися за умови їх локальної скінченності. У [100] було доведено, що такі групи тоді і тільки тоді задовольняють умову мінімальності для підгруп, коли цю умову задовольняє підгрупа $N_G(A_\infty)$. Більш того, якщо $N_G(A_\infty)$ є групою з умовою мінімальності для підгруп, то G є скінченним розширенням її повної частини і тому $[G : N_G(A_\infty)] < \infty$.

Зазначимо, що норму $N(G)$ можна розглядати як перетин нормалізаторів усіх циклічних підгруп. У зв'язку з цим природно постає питання розглянути Σ-норму, де Σ складають усі циклічні підгрупи непростих порядків даної групи. Така норма досліджувалась

Т. Д. Лукашовою та М. Г. Друшляк [105] у класі неперіодичних груп і була названа *нормою* $N_G(C_{\overline{p}})$ *циклічних підгруп непростих порядків групи G*.

Зрозуміло, що у неперіодичній групі G, яка збігається з нормою $N_G(C_{\overline{p}})$, інваріантними є всі циклічні підгрупи складеного чи нескінченного порядку. Такі групи за умови їх недедекіндовості вивчалися Т. Г. Лелеченко, Ф. М. Лиманом [106] і були названі майже *дедекіндовими групами.*

Оскільки в неперіодичних групах норма $N_G(C_{\overline{p}})$ нормалізує кожну нескінченну циклічну підгрупу групи G, то $N_G(C_{\overline{p}}) \subseteq N_G(C_\infty)$. Виявляється, що вказані норми збігаються, якщо норма $N_G(C_{\overline{p}})$ циклічних підгруп непростих порядків є неабелевою.

Твердження 4.12. ([105]) *Будь-яка неперіодична група G, що має неабелеву норму* $N_G(C_{\overline{p}})$ *циклічних підгруп непростих порядків, є майже дедекіндовою групою і збігається з цією нормою. При цьому* $G = A\lambda\langle b\rangle$, *де A – нормальна абелева підгрупа, яка містить усі елементи непростих порядків групи G,* $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ *для довільного елемента* $a \in A$.

У 2004 році у роботах [107, 108] Ф.М. Лиманом та Т.Д. Лукашовою введено до розгляду ще одну Σ-норму, де у якості Σ обиралася система усіх абелевих нециклічних підгруп групи. Відповідну Σ-норму було названо *нормою абелевих нециклічних підгруп* групи G і позначено N_G^A. Зрозуміло, що у групі G, що збігається з нормою N_G^A, нормальні усі абелеві нециклічні підгрупи (за умови існування хоча б однієї такої підгрупи). Неабелеві групи з такою властивістю були повністю описані у [109-111] та названі $\overline{HA}$-групами ($\overline{HA}_p$-групами у випадку p-груп).

У [92,112-113] розглядалися нескінченні локально скінченні p-групи (p – довільне просте число), в яких норма N_G^A недедекіндова. Авторами було одержано повний опис таких груп і встановлено, що з нескінченності та недедекіндовості норми N_G^A випливає нормальність усіх абелевих нециклічних підгруп у групі, тобто у цьому випадку $G = N_G^A$. Доведено також, що локально скінченні p-групи з недедекіндовою нормою N_G^A є скінченними розширеннями квазіциклічної групи. Зокрема, мають місце наступні твердження.

Твердження 4.14. ([107, 108]) *Нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою* N_G^A *абелевих нециклічних підгруп є групами одного з наступних типів:*

1) G *– нескінченна* $\overline{HA}_2$*-група,* $N_G^A = G$ *;*

2) *$G=(A\times<b>)\lambda<c>\lambda<d>$, де A – квазіциклічна 2-група, $|b|=|c|=|d|=2$, $[A,<c>]=1$, $[b,c]=[b,d]=[c,d]=a_1\in A$, $|a_1|=2$, $d^{-1}ad=a^{-1}$ для довільного елемента $a\in A$; $N_G^A=N_G=(<a_2>\times<b>)\lambda<c>$, $a_2\in A$, $|a_2|=4$;*

3) *$G=A<y>H$, де A – квазіциклічна 2-група, $[A,H]=E$, $H=<h_1,h_2>$, $|h_1|=4$, $h_1^2=h_2^2=[h_1,h_2]$, $|y|=4$, $y^2=a_1\in A$, $y^{-1}ay=a^{-1}$ для для довільного елемента $a\in A$, $[<y>,H]\subseteq<a_1>\times<h^2>$; $N_G^A=<a_2>\times H$, $a_2\in A$, $|a_2|=4$, $N_G=\langle h_2\rangle\lambda\langle h_1a_2\rangle$.*

Твердження 4.15. ([108]). *Нескінченні локально скінченні p-групи ($p\neq2$), в яких норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, є $\overline{HA_p}$-групами і $G=N_G^A=N_G$.*

Звернемо увагу на те, що у випадку нескінченних локально скінченних 2-груп твердження 4.15 не виконується – існують нескінченні 2-групи, що мають скінченну недедекіндову норму абелевих нециклічних підгруп N_G^A (яка може не збігатися з нормою N_G).

Вивчення скінченних p-груп за певних обмежень на норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп були продовжені М. Г. Друшляк, Т.Д. Лукашовою і Ф. М. Лиманом у роботах [102–103]. Зокрема, у [102] повністю описано будову скінченних p-груп $(p\neq2)$, в яких норма абелевих нециклічних підгруп неабелева, а у [103] – будову скінченних 2-груп з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Доведено також, що довільна 2-група з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A не містить підгрупи кватерніонів тоді і тільки тоді, коли такої підгрупи не містить норма N_G^A. За цих умов норми N_G^A та N_G збігаються [103].

Наступне твердження уточнює результат роботи [92] про співпадання норм N_G^A та N_G для нескінченних локально скінченних p-груп $(p\neq2)$ за умови, що підгрупа N_G неабелева.

Твердження 4.16. ([102]) *У класі локально скінченних p-груп $(p\neq2)$ з неабелевості хоча б однієї з норм N_G^A або N_G випливає, що $N_G=N_G^A$.*

Останнє твердження дозволяє зробити висновок, що будь-яка скінченна p-група ($p\neq2$), що має неабелеву норму N_G^A, є групою одного з типів 1) – 3) твердження 4.2.

Твердження 4.17. ([103]) *Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп вичерпуються групами наступних типів:*

1) G – *недедекіндова неметациклічна* $\overline{HA_2}$ *–група з нециклічним центром,* $G = N_G^A$;

2) $G = H \cdot Q$ – *добуток групи кватерніонів порядку 8 та узагальненої групи кватерніонів;* $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $Q = \langle y, x \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $|x| = 4$, $y^{2^{n-1}} = x^2$, $x^{-1}yx = y^{-1}$, $[Q, H] \subseteq \langle x^2, h_1^2 \rangle$; $N_G^A = \left\langle y^{2^{n-2}} \right\rangle \times H$;

3) $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$, $|x| = 2^k$, $|b| = 2^m$, $m > 2$, $k \geq m + r$, $1 \leq r < m - 1$, $Z(G) = \left\langle x^{2^{r+1}} \right\rangle \times \left\langle b^{2^{r+1}} \right\rangle$, $[x, b] = x^{2^{k-r-1}s} b^{2^{m-1}t}$, $(s, 2) = 1$, $0 \leq t < 2$; $N_G^A = N_G = \left\langle x^{2^{m-1}} \right\rangle \lambda \langle b \rangle$.

Продовжуючи дослідження скінченних 2-груп Т.Д. Лукашовою, Ф. М. Лиманом і М. Г. Друшляк було одержано структурний опис груп, що мають циклічний центр та неметациклічну недедекіндову норму N_G^A.

Твердження 4.18. *Скінченні 2-групи з неметациклічною недедекіндовою нормою* N_G^A *абелевих нециклічних підгруп та циклічним центром вичерпуються групами наступних типів:*

1) G – *неметациклічна негамільтонова* $\overline{HA_2}$*-група з циклічним центром,* $G = N_G^A$;

2) $G = (\langle x \rangle \lambda \langle c \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|x| = 2^n$, $n > 3$, $|b| = |c| = 2$, $[x, b] = x^{\pm 2^{n-2}} c$, $[b, c] = [x, c] = x^{2^{n-1}}$, $N_G^A = N_G = (\left\langle x^2 \right\rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle b \rangle$;

3) $G = (\langle x \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle \lambda \langle d \rangle$, $|x| = 2^n$, $n > 2$, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[x, c] = [x, b] = 1$, $[b, c] = [c, d] = [b, d] = x^{2^{n-1}}$, $d^{-1}xd = x^{-1}$, $N_G^A = N_G = (\left\langle x^{2^{n-2}} \right\rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$;

4) $G = (\langle c \rangle \lambda H) \langle y \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|c| = 4$, $[c, h_2] = 1$, $[c, h_1] = c^2$, $y^2 = h_1$, $[y, h_2] = c^2 h_1^2$, $[y, c] = h_2^{\pm 1}$; $N_G^A = \langle c \rangle \lambda H$.

Залишається відкритим питання щодо будови скінченних 2-груп з циклічним центром, в яких норма N_G^A метациклічнаі недедекіндова, зокрема, є групою діедра порядку 8.

Дослідження впливу властивостей норми абелевих нециклічних підгруп на властивості групи було продовжено у роботі [114], де вивчалися нескінченні періодичні групи, в яких вказана норма є недедекіндовою локально нільпотентною підгрупою. Було встановлено, що такі групи задовольняють умову мінімальності для абелевих підгруп і є групами Чернікова.

Твердження 4.19. ([114]) *Нескінченна періодична локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп, коли $G = G_p \times G_{p'}$, де G_p – нескінченна силовська p-підгрупа групи G з недедекіндовою нормою $N_{G_p}^A$ абелевих нециклічних підгруп (де $p \in \pi(G)$), а $G_{p'}$ – скінченна циклічна або скінченна гамільтонова p'-підгрупа, усі абелеві підгрупи якої циклічні, причому $N_G^A = N_{G_p}^A \times G_{p'}$.*

Якщо ж G – локально скінченна не локально нільпотентна група, що має нескінченну локально нільпотентну недедекіндову норму N_G^A, то $G = G_p \leftthreetimes H$, де G_p – нескінченна $\overline{HA}_p$-група, яка збігається з силовською p-підгрупою норми N_G^A, а H – скінченна група, усі абелеві підгрупи якої циклічні і $(|H|, p)=1$. Окрім того, встановлено будову нескінченних локально скінченних ненільпотених груп, в яких норма N_G^A є скінченною недедекіндовою нільпотентною підгрупою.

Дослідження норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп у класі неперіодичних груп були продовжені М.Г. Друшляк та Ф.М. Лиманом. У [115-116] розглядалися неперіодичні групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп залежно від наявності [115] чи відсутності [116] в них вільної абелевої підгрупи рангу 2.

Твердження 4.20. ([115]) *Якщо неперіодична група G містить вільну абелеву підгрупу рангу 2, а її норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова, містить абелеву нециклічну підгрупу та скінченну абелеву інваріантну в групі G підгрупу F і централізатор $C_G(F)$ містить всі елементи нескінченного порядку групи, то $N_G^A = N_G(C_\infty) = B\langle d \rangle$, де B – абелева підгрупа, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи G, $|d| = 2$ або $|d| = 4$, $d^2 \in B$, d^2 є єдиною інволюцією в групі G і $d^{-1}bd = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.*

Доведено також, що неперіодична група G не містить вільних абелевих підгруп рангу 2, якщо її норма N_G^A є негамільтоновою $\overline{HA}$-групою і не містить таких підгруп.

В 2015 році Ф.М.Лиман та Т.Д.Лукашова [117] розглянули ще одне узагальнення норми групи – *норму N_G^d розкладних підгруп,* яка визначається як перетин нормалізаторів усіх розкладних підгруп групи. У випадку, коли група не містить розкладних підгруп, можна вважати, що $N_G^d = G$. Будову локально розв'язних груп, в яких система розкладних підгруп порожня, а також груп, у яких кожна розкладна підгруп є нормальною (тобто, груп з умовою $N_G^d = G$), було описано у роботі [118].

Зрозуміло, що група містить розкладні підгрупи тоді і тільки тоді, коли вона містить розкладні абелеві підгрупи. Тому дослідження норми розкладних підгруп проводились залежно від існування у групі тих чи інших систем розкладних абелевих підгруп. Цей факт дає підстави вважати, що норма N_G^d розкладних підгруп тісно пов'язана з нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Зокрема, у [117] було доведено, що в класі локально скінченних p-груп вказані норми збігаються. У класах скінченних непримарних, а також нескінченних періодичних локально нільпотентних непримарних груп має місце включення $N_G^A \supseteq N_G^d$, причому випадок $N_G^A \neq N_G^d$ досягається.

Твердження 4.21. ([117]) *Періодична локально нільпотентна група G, що містить абелеву нециклічну підгруппу, тоді і тільки тоді має недедекіндову норму N_G^d розкладних підгруп, коли G – локально скінченна p-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп.*

Дослідження впливу норми розкладних підгруп на властивості групи продовжено авторами даної статті і у класі неперіодичних груп. Зокрема, було встановлено наступне.

Твердження 4.22. *Нехай G – неперіодична група, що має недедекіндову норму N_G^d розкладних підгруп. Тоді мають місце наступні перджения:*

a) група G тоді і тільки тоді не містить розкладних підгруп, коли їх не містить норма N_G^d цієї групи;

b) група G тоді і тільки тоді містить вільну абелеву підгрупу рангу $r \geq 2$, коли вільну абелеву підгрупу такого рангу містить її норма N_G^d;

c) група G тоді і тільки тоді містить непримарні абелеві підгрупи, коли підгрупи з такою властивістю містить норма N_G^d цієї групи;

d) кожна розкладна абелева підгрупа групи G є мішаною тоді і тільки тоді, коли мішаною буде кожна розкладна абелева підгрупа її норми N_G^d.

Встановлено також, що у класі неперіодичних локально розв'язних груп має місце лише одне з включень $N_G^A \supseteq N_G^d$ або $N_G^A \subseteq N_G^d$ за умови, що хоча б одна з розглядуваних норм недедекіндова, а норма N_G^d нескінченна. Наступні приклади підтверджують, що умова нескінченності норми N_G^d є істотною.

Приклад 4.2. $G = (\langle a \rangle \rtimes B) \rtimes \langle c \rangle$, де $|a| = p$ – просте число ($p \neq 2$), B – група, ізоморфна адитивній групі q-них дробів, $q \notin \{2, p\}$, $B =$

$B_1\langle x\rangle,\ x^2 \in B_1,\ \ x^{-1}ax = a^{-1},\ [B_1\langle, a\rangle] = E,\ |c| = 2,\ \ [c, a] = 1,\ c^{-1}bc = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.

У цій групі усі періодичні розкладні підгрупи мають порядок $2p$ і є групами виду $\langle a^m c b_1^k\rangle$, де $b_1 \in B_1, k \in \{0,1\}, (m, p) = 1$. Відповідно, усі неперіодичні розкладні підгрупи є мішаними, містяться у групі $B_1 \times \langle a\rangle$ і тому є нормальними в G. Оскільки $N_G(\langle a^m c b_1^k\rangle) = \langle a^m c b_1^k\rangle$, то $N_G^d = \langle a\rangle$.

З іншого боку, G не містить періодичних абелевих нециклічних підгруп, а усі мішані абелеві підгрупи містять $\langle a\rangle$, є підгрупами групи $(B_1 \times \langle a\rangle)$ і тому нормальні в G. Окрім того, усі абелеві нециклічні підгрупи рангу 1 або містяться у підгрупі B, або у підгрупах, спряжених з нею $g^{-1}Bg, g \in G$, або у групі $(B_1 \times \langle a\rangle)$.

Розглянемо нескінченну послідовність підгруп в B_1:

$$\langle b_1\rangle \subset \langle b_2\rangle \subset \cdots \langle b_n\rangle \subset \cdots,$$

$|b_1| = \infty,\ b_{n+1}^{\alpha_{n+1}}{=}b_n,\ \ \alpha_{n+1} \in \mathbb{N},\ (\alpha_{n+1}, p) = 1$ для $n = 1,2,\ldots$. Оскільки ізолятор A підгрупи $\langle ab_1\rangle$ нециклічний (бо з елемента a добувається корінь довільного степеня, взаємно простого з p), робимо висновок, що $N_G(A) = \langle a, B_1\rangle$. Враховуючи, що $N_G(B) = B \leftthreetimes \langle c\rangle$, дістанемо $N_G^A = B_1$ і $N_G^d \cap N_G^A = E$.

Приклад 4.3. $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes B) \leftthreetimes \langle c\rangle$, де $|a| = p$ − просте число ($p \neq 2$), B – група, ізоморфна адитивній групі p-них дробів, $B = B_1\langle x\rangle,\ x^2 \in B_1,\ x^{-1}ax = a^{-1},\ [B_1\langle, a\rangle] = E,\ |c| = 2,\ \ [c, a] = 1,\ c^{-1}bc = b^{-1}$ для довільного елемента $b \in B$.

Як і у прикладі 4.2, у цій групі норма розкладних підгруп $N_G^d = \langle a\rangle$. проте, норма абелевих нециклічних підгруп $N_G^A = (B_1 \leftthreetimes \langle c\rangle)$. Це випливає з того, що для довільного неодиничного елемента $y_1 \in B_1$ ізолятор підгрупи $\langle ay_1\rangle$ циклічний, і тому елемент c нормалізує кожну абелеву нециклічну підгрупу групи G. У цьому випадку норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і $N_G^d \cap N_G^A = E$.

У 2005 році Ф. Марі, Ф. Джованні [78] розглядали поняття *неабелевої норми* $N^*(G)$, що є перетином нормалізаторів усіх неабелевих підгруп групи. Якщо $N^*(G) = G$, то в групі нормальні всі неабелеві підгрупи. Такі групи спочатку вивчалися Г. М. Ромалісом та Н. Ф. Сесекіним [119-121] і були названі *метагамільтоновими*. У подальшому метагамільтонові групи досліджувалися В.Т. Нагребецьким [122], О.А. Махньовим [123], С.М. Черніковим [124], М.М. Семком та М.Ф. Кузенним [125].

У роботі [78] встановлено результати, що узагальнюють теорему Шура [126] про скінченність комутанта в групах, скінченних над центром.

Твердження 4.23. ([78]) *Якщо G є локально ступінчатою групою і фактор-група $G/N^*(G)$ скінченна, то комутант G' скінченний.*

Висновки. Враховуючи усе сказане, можна зробити висновок, що вивчення різноманітних Σ-норм та властивостей груп у залежності від властивостей їх Σ-норм, становить досить важливий напрямок у теорії груп. У наш час можливими стають дослідження груп, відмінних від своїх Σ-норм, оскільки у багатьох випадках будова груп, що збігаються з Σ-нормами відома, а також груп, що мають недедекіндові Σ-норми. Це дасть можливість розширити відомі класи узагальнених дедекіндових груп та дозволить більш ефективно вивчати групи з обмеженнями на нормалізатори різних систем підгруп.

При дослідженні груп з узагальненими нормами виникає цілий ряд проблем, зокрема:

– дослідження груп, що співпадають зі своїми Σ-нормами;

– дослідження груп, у яких Σ-норми вироджуються до одиничної підгрупи (або центру);

– дослідження груп, у яких Σ-норми нецентральні дедекіндові;

– дослідження груп, у яких Σ-норми недедекіндові;

– дослідження нескінченних груп, у яких Σ-норми мають скінченний неодиничний індекс.

Розв'язання цих проблем дозволить значно розширити конкретну базу сучасної теорії груп.

Список використаних джерел

1. Dedekind R. Űber Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind/ R. Dedekind // Math.Ann. – 1897. –48. – P. 548-561.
2. Baer R. Sitnation der Untergruppen und Structur der Gruppe / R. Baer // S.-B. Heidelberg.Akad. – 1933. – 2.– S. 12-17.
3. Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe / R. Baer // Comp. Math. – 1934. – 1.– S. 254-283.
4. Baer R. Gruppen mit hamiltonschen Kern / R. Baer // Compositio Math. – 1935. – 2.– S. 241-246.
5. Baer R. Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung / R. Baer // Compositio Math. – 1935. – 2.– S. 247-249.
6. Baer R. Gruppen mit vom Zentrum wesetlich verschiedenem Kern und abelische Factorgruppe nach dem kern / R. Baer // Compositio Math. – 1937. – 4. – P. 1-77.
7. Baer R. Almost Hamiltonian groups / R. Baer // Compositio Math. – 1939. – 6. – P. 382-406.
8. Baer R. Groups with abelian norm quotient group / R. Baer // Amer. J. Math. – 1939. – 61.– S. 700-708.
9. Baer R. Nilpotent groups and their generalizations / R. Baer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – 47.– S. 393-434.
10. Baer R. Norm and hypernorm / R. Baer // Publ. Math. – 1956. – 4. – S. 347-350.
11. Wos L. On commutative prime power subgroups of the norm / L. Wos //

Ill. J. Math. – 1958. – 2. – S. 271-284.
12. Schenkman E. On Norm of a Group / E. Schenkman // Ill. J. Math. – 1960. – 4. – S. 150-152.
13. Evan J. Permutable diagonal-type subgroups of $G \times H$ / J. Evan // Glasgow Math. J. – 2003. – 45. – P. 73-77.
14. Bryce R.A. A note on Hamiltonian 2-groups / R. A. Bryce, J. Cossy // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1991. – 86. – P. 175-182.
15. Bryce R.A. The Subgroups of Baer and Hughes / R. A. Bryce // Arch. Math. – 1993. – 61. – P. 305-312.
16. Bryce R.A. A note on groups with non-central norm / R. A. Bryce L. J. Rylands // Glasgow Math. J. – 1994. – 36, 1. – P. 37-43.
17. Bryce R.A. The Series of Norms in a Soluble p-Group / R. A. Bryce, J. Cossy // Bull. London Math. Soc. – 1997. – 29, 2. – P. 165-172.
18. Bryce R.A. A Note on Groups with Hamiltonian Quationts / R. A. Bryce, J. Cossey // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1998. – 100. – P. 1-11.
19. Beidleman J. C. Centre and norm / J. C. Beidleman, H. Heineken, M. Newell // Bull. Austral. Math. Soc. – 2004. – 69. – P. 457-464.
20. Guo X. On the Norm and Wielandt Series in Finite Groups / X. Guo, X. H. Zhang // Algebra Colloq. –2012. – 19 (3). – P. 411-426.
21. Brewster B. Embedding properties in direct products / B. Brewster, A. Martinez-Pastor, M. D. Perez-Ramos // Groups St Andrews. – 2005. – 1. – P. 246-256.
22. Gavioli N. On the number of conjugacy classes of normalisers in a finite p-groups / N. Gavioli, L. Legarreta, C. Sica, M. Tota // Bull. Aust. Math. Soc. – 2005. – 73. – P. 219-230.
23. Russo F. A note on the Quasicentre of a Group / F. Russo // International Journal of Algebra. – 2008. – 2, № 7. – P. 301-313.
24. Лемешев И. В. О норме и центре конечной группы / И. В. Лемешев // Международная алгебраическая конференция «Классы групп, алгебр и их приложения», 9-11 июля 2007 г.: Тезисы докл. – Гомель, 2007. – С. 99-100.
25. Wang J. On the norm of finite groups / J. Wang, X. Guo // Algebra Colloquium. – 2007. – 14, 4. – P. 605-612.
26. Wang J.X. Finite groups with its power automorphism groups having small indices / J. X. Wang, X. J. Guo // Acta Mathematica Sinica, English Series. – 2009. – 25, 7. – P. 1097-1108.
27. Smith J. Groups in which every subgroup of the norm is normal / J. Smith // The XXIXth Ohio State-Denison Mathematics Conference. – Columbus, Ohio. – 2008. – P. 35.
28. Russo F. The generalized commutativity degree in finite group / F. Russo // Acta Universitatis Apulensis. – 2009. – № 18. – P. 161-167.
29. Baer R. Groups with preassigned central and central quotient group / R. Baer // Transactions of the American Mathematical Society. – 1938. –

44. – P. 387-412.
30. Berkovich Ya. Alternate proof of the Reinold Baer theorem on 2-groups with nonabelian norm / Ya. Berkovich // Glasnik Matematicki. – 2012. – 47 (1). – P. 149-152.
31. Miller G. A. Subgroups transformed according to a group of prime order / G. A. Miller // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1943. – 29 (10). – P. 311-314.
32. Субботин И. Я. О группах с инвариаторным условием / И. Я. Субботин // Подгрупповая характеризация групп. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1982. – С. 99-109.
33. Субботин И. Я. Разрешение групп с инвариаторным условием для неабелевых нормальных делителей / И. Я. Субботин, Н. Ф. Кузенный // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 10. – С. 68-70.
34. Scott W. R. Group theory / W. R. Scott. – Englewood Gliffs. – 1964. – 479 p.
35. De Falco M. Groups with decomposable set of quasinormal subgroups / M. De Falco, F. De Giovanni, C. Musella // Serdica Math. J. – 2001. – 27. – P. 137-142.
36. Kirichenko V. V. On some developments in investigation of groups with prescribed properties of generalized normal subgroups / V. V. Kirichenko, L. A. Kurdachenko // Algebra and Discrete Mathematics. – 2010. – 9, № 1. – P. 41-71.
37. Giovanni F. Pronormality in infinite groups / F. Giovanni, G. Vincenzi // Math. Proc. of the Royal Irish Academy. – 2000. – 100 A (2). – P. 189-203.
38. Romano E. Pronormality in generalized FC-groups / E. Romano, G. Vincenzi // Bull. Aust. Math. Soc. – 2011. – 83, 2. – P. 220-230.
39. Smith J. Groups with a chain of normalizers / J. Smith // The XXVIIth Ohio State-Denison Mathematics Conference. – Columbus, Ohio. – 2004.
40. Bell H. Ring analogues of Baer`s norm and P.Hall`s margins / H. Bell, F. Guzman, L.-C. Kappe // Arch. Math. – 1990. – 55. – P. 342-354.
41. Dixon M.R. Linear groups with finite dimensional orbits / M.R. Dixon, L.A. Kurdachenko, J. Otal // Proc. Ischia Group Theory. – 2010. – P.131-145.
42. Baer R. Group Elements of Prime Power Index / R. Baer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – 75(1). – P. 20-47.
43. Huppert B. Zur Theorie der Formationen / B. Huppert // Arch. Math. – 1968. – 19(6). – P. 561-674.
44. Шеметков Л. А. Формации алгебраичесих систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 255 с.
45. Doerk K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
46. Murashka V.I. On one generalization of Baer's theorems about hypercentre and nilpotent residual / V. I. Murashka // Problems of Physics,

Mathematics and Technics. – 2013. – 3(16). – P. 84-88.
47. Kappe W. Die A-Norm einer Gruppe / W. Kappe // Ill. J. Math. – 1961. – 5, № 2. – S. 187 -197.
48. Levi F. W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions / F. W. Levi // Ill. J. Math. – 1942. – № 6. – P. 87-97.
49. Курош А. Г. Теория групп / А. Г. Курош. – М.: Наука. – 1967. – 648 с.
50. Kappe W. Gruppentheoretische Eigenschaften und charakreristische Untergruppen / W. Kappe // Arch. Math. – 1962. – 13, 1. – S. 38–48.
51. Kappe W. Properties of Groups Related to the Second Center / W. Kappe // Math. Zeitschr. – 1967. – 101. – S. 356-368.
52. Kappe W. E-Normen Endlicher Gruppe / W. Kappe // Arch. Math. – 1968. – 19. – S. 256-264.
53. Gashütz W. Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen / W. Gashütz // Mat. Z. – 1953. – 58, № 5. – S. 160-170.
54. Wielandt H. Über der Normalisator der Subnormalen Untergruppen / H. Wielandt // Mat. Z. – 1958. – 69, № 5. – S. 463-465.
55. Robinson D. J. S. Course in the Theory of Groups / D. J. S. Robinson // Springer-Verlag. New York–Heidelberg–Berlin – 1982.– 481 pp.
56. Robinson D. J. S. On the theory of subnormal subgroups / D. J. S. Robinson // Math. Z. – 1965. – 89. – P. 30-51.
57. Rosenblad J. E. On certain subnormal coalition classes / J. E. Rosenblad // J. Algebra. – 1964. – 1. – P. 132-138.
58. Cossy J. The Wielandt subgroup of a polycyclic group / J. Cossy // Glasgow Math. J. – 1991. – 33. – P. 231-234.
59. Kegel O. H. Uber den Normalisator von subnormalen und erreichbaren Untergruppen / O. H. Kegel // Math. Ann. – 1966. – 163. – P. 248-258.
60. Bryce R. The Wielandt subgroup of a finite soluble group / R. Bryce, J. Cossy // J. London. Math. Soc. – 1989. – 40, № 2. – P. 244-256.
61. Bryce R. A. A note on p-Groups with power automorfisms / R. A. Bryce, J. Cossey, E. A. Ormerod // Glasgow Math. J. – 1992. – 34, 3. – P. 327-332.
62. Bryce R. A. Subgroups like Wielandt's in Finite Soluble Groups / R. A. Bryce // Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society. – 1990. – 107, 2. – P. 239-259.
63. Brandl R. On the Wielandt subgroup of a infinite soluble groups / R. Brandl, S. Franciosi, F. Giovanni // Glasgow Math. J. – 1990. – 3, № 2. – P. 121-125.
64. Camina A. R. The Wielandt length of finite groups / A. R. Camina // J. Algebra. – 1970. – 15. – P. 142-148.
65. Casolo C. Soluble groups with finite Wielandt length / C. Casolo // Glasgow Math. J. – 1989. – 31. – P. 329-334.
66. Casolo C. Wielandt series and defects of subnormal subgroups in finite soluble groups / C. Casolo // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1992. – 87.

– P. 93-104.
67. Ormerod E. A. The Wielandt Subgroup of Metacyclic *p*-groups / E. A. Ormerod // Bull. Australian Math. Soc. – 1990. – 42, 3. – P. 499-510.
68. Wetherell C. J.T . The Wielandt series of metabelian groups // C. J. T. Wethwrell // Bull. Austral. Math. Soc. – 2003. – 67, 4. – P. 267-276.
69. Wetherell C. J. T. Soluble groups of small Wielandt length / C. J. T. Wethwrell // Comm. Alg. – 2004. – 32, 4. – P.1472-1486.
70. Zhang X. On the Wielandt subgroup in a p-group of maximal class / X. Zhang, X. Guo // Chinese Annals of Mathematics, Series B. – 2012. – 33(1). – P. 83-90.
71. Guo X. On the Norm and Wielandt Series in Finite Groups / X. Guo, X. Zhang // Algebra Colloq. – 2012. – 19(3). – P. 411-426.
72. Robinson D. L. S. Groups in which normality is a transitive relation / D. L. S. Robinson // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1964. – 60. – P. 21-38.
73. Beidleman J. C. The generalized Wielandt subgroup of a group / J. C. Beidleman, M. R. Dixon, D. J. S. Robinson // Canad. J. Math. – 1995. – 47, 2. – P. 246-261.
74. Beidleman J. C. The Wielandt Subgroup / J. C. Beidleman, M. R. Dixon, D. J. S. Robinson // Infinite Groups 94. Berlin-New-Jork. – 1995. – P. 23-40.
75. Giovanni F. Groups in which every infinite subnormal subgroup is normal / F. Giovanni, S. Fransiosi // J. Algebra. – 1985. – 96, 2. – P.566-580.
76. Franchi C. Subgroups like Wielandt's in Soluble Groups / C. Franchi// Glasgow Math. J. – 2000. – 42. – P. 67-74.
77. Franchi C. m-Wielandt series in infinite Groups / C. Franchi// J. Austral. Math. Soc.– 2001. – 70. – P. 76-87.
78. Mari F. Groups with Few Normalizer Subgroups / F. Mari, F. Giovanni // Irish. Math. Soc. Bulletin. – 2005. – 56. – P. 103-113.
79. Amin F. On Generalized Wielandt Subgroup / F. Amin, A. Ali, M. Arif // World Applied Sciences Journal. – 2014. – 30(12). – P. 1939-1946.
80. Lia Sh. On the intersection of the normalizers of derived subgroups of all subgroups of a finite group / Sh. Lia, Zh. Shenb // Journal of Algebra. – 2010. – 323, 5. – P. 1349-1357.
81. Shen Z. On the norm of the derived subgroups of all subgroups of a finite group / Z. Shen, S. Lia, W. Shi // Bull. Iranian. Math. Soc. – 2014. – 40, 1. – P. 281-291.
82. Shen Zh. On norm of the nilpotent residuals of all subgroups of a finite order /Zh. Shen, W. Shi, G. Qian // Journal of Algebra. – 2012. – 352, 1. – P. 290-298.
83. Gong L. On the Intersection of the Normalizers of the Nilpotent Residuals of All Subgroups of a Finite Group / L. Gong, X. Guo // Algebra Colloq. – 2013. – 20, 2. – P. 349-360.

84. Su N. On the intersection of normalizers of the $\mathcal{F}$-residuals of all subgroups of a finite group / N. Su, Ya. Wang // Journal of Algebra. – 2013. – 392, 15. – P. 185-198.
85. Chen X. On the $\pi\mathcal{F}$-norm and the $\mathfrak{H}\mathcal{F}$-norm of a finite group / X. Chen, W. Guo // Journal of Algebra. – 2014. – 405, 1. – P. 213-231
86. Ballester-Bolinches A. Generalised norms in finite soluble groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, L. Zhang // Journal of Algebra. – 2014. – 402(15). – P. 392-405.
87. Laue R. Kerne von Permutationsdarstellungen der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe / R. Laue // Archiv der Mathematic. – 1976. – 27, 1. – Z. 463-472.
88. Лиман Ф. М. Групи з інваріантними нециклічними підгрупами / Ф. М. Лиман // ДАН УРСР. – 1967. – № 12. – С. 1073-1075.
89. Лиман Ф. Н. 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами / Ф. Н. Лиман // Математические заметки. – 1968. – 4, № 1. – С. 75-83.
90. Лиман Ф. Н. Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп / Ф. Н. Лиман // Алгебра и логика. – 1968. – 7, № 4. – С. 70-86.
91. Лиман Ф. Н. О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс / Ф. Н. Лиман // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 5. – С. 678-684.
92. Лукашова Т. Д. Локально скінченні p-групи ($p\neq2$) з неабелевою нормою нециклічних підгруп / Т. Д. Лукашова // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки. – 2001. – № 1. – С. 43-53.
93. Лукашова Т. Д. Про нециклічну норму нескінченних локально скінченних груп / Т. Д. Лукашова // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 3. – С. 342-348.
94. Лукашова Т. Д. Конечные 2-группы с недедекиндовой нормой нециклических подгрупп / Т. Д. Лукашова // Известия Гомельского гос-го ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2001. – 6, № 3. – С. 139-150.
95. Лукашова Т. Д. Локально скінченні групи з ненільпотентною нормою нециклічних підгруп / Т. Д. Лукашова // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки. – 2001. – № 3. – С. 38-42.
96. Лиман Ф. Н. Обобщённые нормы непериодических групп / Ф. Н. Лиман, Т. Д. Лукашова // Известия гомельского ун-та. – 2003. – 19, № 4. – С. 62-67.
97. Ольшанский А. Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков / А. Ю. Ольшанский // Изв. АН СССР. – 1980. – 44, № 2. – С. 309-321.
98. Shen Z. Finite non-nilpotent generalizations of Hamiltonian groups //

Z. Shen, W. Shi, J. Zhang // Bull. Korean. Math.Soc. – 2011. – 48, 6. – P. 1147-1155.
99. Shen Z. On a Generalization of HamiltonianGroups and a Dualization of PN-Groups / Z. Shen, J. Zhang, W. Shi // Communications in Algebra. – 2013. – 41(5). – P. 1608-1618.
100. Лиман Ф. М. Про норму нескінченних абелевих підгруп неперіодичних груп / Ф. М. Лиман, Т. Д. Лукашова // ІІІ Міжнар. алгебр. конф. в Україні, 2-8 липня 2001 р. – Суми, 2001. – С. 205-207.
101. Лиман Ф. М. Про нескінченні групи з заданими властивостями норми нескінченних підгруп / Ф. Н. Лиман, Т. Д. Лукашова // Укр. мат. журн. – 2001. – 53. – С. 625-630.
102. Лиман Ф. Н. О норме бесконечных циклических подгрупп непериодических групп / Ф. Н. Лиман, Т. Д. Лукашова // Вестник ВГУ имени П.М. Машерова. – Витебск. – 2006. – № 4. – С. 108-111.
103. Черников С. Н. Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами / С. Н. Черников // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наукова думка, 1971. – С. 47-65.
104. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп / С. Н. Черников // Укр. мат. журн. – 1967.–19, №6. – С.111-131.
105. Лукашова Т. Д. Про норму циклічних підгруп непростих порядків у неперіодичних групах / Т. Д. Лукашова, М. Г. Друшляк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2006. – № 7. – С. 72-77.
106. Лелеченко Т. Г. Группы с инвариантными максимальными абелевыми подгруппами ранга 1 непростых порядков / Т. Г. Лелеченко, Ф. Н. Лиман // Подгрупповая характеризация групп. – К.: Институт математики. – 1982. – С. 85-92.
107. Лиман Ф. М. Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп / Ф. М. Лиман, Т. Д. Лукашова // Вісник Київського університету, серія „Фіз.-мат. науки”. – 2005. – № 1. – С.56-64.
108. Лукашова Т. Д. Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних р-груп (р≠2) / Т. Д. Лукашова // Вісник Київського університету, серія „Фіз.-мат. науки”. – 2004. – № 3. – С. 35-39.
109. Лиман Ф. М. р-групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні / Ф. М. Лиман // ДАН УРСР. – 1968. – № 8.– С. 696-699.
110. Лиман Ф. Н. Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны / Ф. Н. Лиман // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наукова думка. – 1971. – С. 65-96.
111. Лиман Ф. М. Неперіодичні групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні / Ф. М. Лиман // ДАН УРСР. – 1969. – № 1.– С. 11-13.
112. Друшляк М. Г. Конечные р-группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой

абелевых нециклических подгрупп / М. Г. Друшляк // Известия Гомельского университета имени Ф.Скорины. – 2010. – 58, № 1. – С. 192-197.
113. Лиман Ф. М. Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп / Ф.М. Лиман, Т. Д. Лукашова, М. Г. Друшляк // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – № . – С. 26-32.
114. Лиман Ф. Н. Бесконечные локально конечные группы с локально нильпотентной недедекиндовой нормой абелевых нециклических подгрупп / Ф.Н. Лиман, Т. Д. Лукашова // Вестник Витебского государственного университета. – 2012. – № 6(72). – С. 5-12.
115. Друшляк М. Г. Про норму абелевих нециклічних підгруп у неперіодичних групах / М. Г. Друшляк // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – № 1. – С. 14-18.
116. Лиман Ф. Н. О непериодических группах без свободных абелевых подгрупп ранга 2 с недедекиндовой нормой абелевых нециклических подгрупп / Ф. Н. Лиман, М. Г. Друшляк // Вісник Дніпропетровського університету. – 2011. – Вип. 16. – С. 83-97.
117. Лиман Ф.Н. О норме разложимых подгрупп в локально конечных группах / Ф.Н. Лиман, Т.Д. Лукашова // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67. – №4. – С. 480-488.
118. Лиман Ф.М. Групи, усі розкладні підгрупи яких інваріантні / Ф.М. Лиман // Укр. Мат. журн. – 1970.– 22, №6.– С.725-733.
119. Ромалис Г. М. О метагамильтоновых группах I / Г. М. Ромалис, Н. Ф. Сесекин // Мат. зап. Урал. Ун-та. – 1966. – 5, № 3. – С. 45-49.
120. Сесекин Н. Ф. О метагамильтоновых группах II / Н. Ф. Сесекин, Г. М. Ромалис // Мат. зап. Урал. Ун-та. – 1968. – 6 , № 5. – С. 50-53.
121. Ромалис Г.М. О метагамильтоновых группах III / Г.М. Ромалис, Н.Ф. Сесекин // Мат. зап. Урал. Ун-та. – 1970. – 7, № 3. – С. 195-199.
122. Нагребецкий В.Г. Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна/ В. Г. Нагребецкий//Мат. зап. Уральского ун-та. – 1967. – №1. – С.80-88.
123. Махнев А.А. О конечных метагамильтоновых группах/ А.А. Махнев //Мат. зап. Уральского ун-та. – 1976. – №1. – С.60-75.
124. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп/ С. Н. Черников.– М.:Наука, 1980.– 384 с.
125. Кузенний М. Ф. Метагамільтонові групи та їх узагальнення/ М. Ф. Кузенний, М. М. Семко// К: Ін-т математики НАН України. – 1996. –232 с.
126. Горчаков Ю. М. Группы с конечными классами сопряженных элементов / Ю. М. Горчаков. – М.: Наука. – 1978. – 119 с.

Анотація. Лиман Ф., Лукашова Т., Друшляк М. Узагальнені норми в групах. *Статья носит обзорный характер. Авторы постарались указать все известные результаты, касающиеся нормы группы и ее обобщений. Особое внимание уделено анализу собственных исследований различных обобщенных норм, в частности нормы нециклических, нормы абелевых нециклических, нормы бесконечных, бесконечных абелевых и других систем абелевых подгрупп.*

Ключові слова: *норма групи, узагальнена норма, підгрупа Віландта, норма нециклічних підгруп, норма абелевих нециклічних підгруп, норма нескінченних підгруп, норма абелевих нескінченних підгруп, норма розкладних підгруп.*

Abstract. Lyman F., Lykashova T., Drushlyak M. Generalized norms in groups. *In this survey paper the authors specify all the known findings related to the norms of the group and their generalizations. Special attention is paid to the analysis of their own study of different generalized norms, particularly the norm of non-cyclic subgroups, the norm of Abelian non-cyclic subgroups, the norm of infinite subgroups, the norm of infinite Abelian subgroups and the norm of other systems of Abelian subgroups.*

Keywords: *norm of group, generalized norm, Wielandt subgroup, norm of non-cyclic subgroups, norm of Abelian non-cyclic subgroups, norm of infinite subgroups, norm of infinite Abelian subgroups, norm of decomposable subgroups.*

Олена Мартиненко
доцент кафедри математики
marlena120@mail.ru
Ярослав Чкана
старший викладач кафедри математики
chkana_76@mail.ru

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ НА ПОСЛІДОВНОСТІ

При дослідженні послідовностей не можна безпосередньо використовувати теорем диференціального та інтегрального числення функції неперервного аргументу, тому це іноді дуже ускладнює їх вивчення. З іншого боку, якщо для даної послідовності (a_n) підібрати функцію $a(x)$, визначену при всіх $x > 0$, і покласти $a(n) = a_n$ для будь-яких $n \in N$, то вивчення поведінки послідовності (a_n) можна звести до дослідження функції $a(x)$, коли її аргумент набуває цілих значень. Перехід до такої функції не порушує загальності міркувань, оскільки послідовність є частинним випадком функціональної залежності. Звичайно, що шукана функція повинна бути досить "гарною", наприклад, неперервною, диференційовною тощо. Підібрати функцію, аналітичний вираз якої визначається не дуже складною формулою, не завжди легко, хоча неперервних кривих, що проходять через точки $(n; a_n)$ на координатній площині, існує безліч. Іноді підбір відповідної функції неперервного аргументу логічно визначається самою задачею, але досить часто її вигляд не є очевидним і пошук «найкращої» формули вимагає ґрунтовних знань. У найпростіших випадках у формулі загального члена послідовності досить замінити дискретний аргумент n на неперервний аргумент x. Але така заміна не завжди можлива, наприклад, для послідовності $a_n = (-1)^n$, хоча тотожність $(-1)^n = \cos \pi n$ дозволяє задати функцію $a(x)$ як $a(x) = \cos \pi x$; для послідовності, загальний член якої $a_n = n!$, $a(x)$ можна задати функцією Ейлера $a(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$.

Метою цієї статті є виділити основні класи задач на послідовності, розв'язання яких потребує переходу до функцій неперервного аргументу, та розкрити особливості застосування математичного апарату диференціального та інтегрального числення при їх розв'язуванні.

1.Застосування диференціального числення.

Однією з найбільш поширених задач є наступна: для заданої числової послідовності знайти її найбільший або найменший член (або довести її обмеженість).

Перейшовши до функції неперервного аргументу заміною дискретної змінної n на змінну x при $x \geq 1$, знаходимо її екстремальні значення, застосовуючи відповідні теореми диференціального числення функції однієї змінної. При зворотному переході до змінної n необхідно порівняти найближчі до знайденого значення змінної x цілі значення n і обрати серед них ті, які відповідають умові задачі.

Нехай потрібно знайти найбільший член послідовності $a_n = \dfrac{n-1}{n^2 - n + 7}$.

Для цього розглянемо функцію $a(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 7}$, $x \geq 1$ і знайдемо її похідну: $a'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 6}{(x^2 - x + 7)^2}$. Очевидно, що точка $x = 1 + \sqrt{7} \approx 3{,}6$ є точкою локального максимуму цієї функції для $x \geq 1$. Повертаючись до послідовності, і враховуючи, що $x = 1 + \sqrt{7} \in [3;4]$, порівняємо значення a_3 і

a_4. Маємо, що $a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{19}$, тобто найбільшим членом заданої послідовності є $a_4 = \frac{3}{19}$.

Розглянемо задачі на обчислення границь послідовностей, при знаходженні яких перехід до функцій неперервного аргументу та застосування до них правила Лопіталя є більш ефективним.

Розглянемо послідовності, загальні члени яких мають вигляд $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$ або $\ln a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$. Замінимо в кожній частині цих рівностей n на x, відповідно матимемо функції $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ або $y = \ln \frac{f(x)}{g(x)}$. Очевидно, що коли існує $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, то існують і границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} y$ або $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \lim\limits_{x\to\infty} \ln y$. Отже, замість того, щоб шукати границю числової послідовності при $n \to \infty$, ми знайдемо границю відповідної функції при $x \to \infty$.

Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ [3]. Для цього розглянемо функцію $y = \frac{\ln x}{x}$ і знайдемо її границю за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Тоді можна стверджувати, що й $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, а отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, і $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Даний метод досить часто є корисним при обчисленні сум збіжних числових рядів.

Нехай потрібно знайти суму числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ [6]. Розглянемо послідовність його частинних сум $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ і, виконавши перетворення, отримаємо, що $\frac{1}{2} S_n = S_n - \frac{1}{2} S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k+1}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2^{k+1}} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} \text{ або } S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Відомо, що збіжність числового ряду рівносильна збіжності послідовності його частинних сум. Розглянемо функцію $y = \frac{x+2}{2^x}$ і знайдемо її границю за правилом Лопіталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2^x\ln 2}=0$. Повертаючись до послідовності (S_n), знайдемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n+2}{2^n}\right)=2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$=2.

2. Застосування інтегрального числення.

Для знаходження границь числових послідовностей вигляду $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ інколи зручно скористатись означенням визначеного інтеграла як границі послідовності інтегральних сум виду $\sum\limits_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k$, складених для деякої функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. При цьому потрібно переконатись, що кожен із доданків під знаком границі є нескінченно малою величиною при $n\to\infty$, а кількість самих доданків нескінченно велика. Не порушуючи загальності міркувань, можна розбити відрізок $[a;b]$ на n рівних частин $\left(\Delta x_k=\dfrac{b-a}{n},k=1,2,\ldots,n\right)$, покласти $c_k=x_k=a+\dfrac{b-a}{n}k,\ k=1,2,\ldots,n$ і перетворити вираз під знаком границі до вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\dfrac{b-a}{n}$.

Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha>0$ [5]. Розглянемо функцію $y=x^\alpha$ на відрізку $[0;1]$, розіб'ємо його на n рівних частин $\left(\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\dfrac{1}{n}\right)$ і покладемо $c_k=x_{k-1}=\dfrac{k-1}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(c_k)^\alpha\,\Delta x_k=\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}.$$

Дуже ефективним є застосування даного методу при обчислити границі $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. [1] Позначимо через A шукану границю і знайдемо її логарифм:

$$\ln A=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right).$$

Зауважимо, що неперервність логарифмічної функції дозволила поміняти місцями операції логарифмування і знаходження границі.

Вираз під знаком границі є інтегральною сумою для функції $y = \ln x$ на відрізку [0;1], отже, $\ln A = \int\limits_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left(x \ln x - x\right)\Big|_{\varepsilon}^{1} = -1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$.

У деяких випадках використання геометричного змісту визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ дозволяє знаходити суми скінченної кількості доданків.

Відомо, що при довільних значеннях $k \in N$ сума $S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ може бути подана як многочлен від n степеня $k+1$, наприклад,

$$S_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ці формули можна довести методом математичної індукції, але цікавим є запропонований метод, який розглянемо на прикладі $S_1(n)$[2].

З геометричної точки зору сума $S_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n$ дорівнює сумі площ прямокутників (рис. 1). А площа криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0$, $y = x + \frac{1}{2}$, $x = n - 1$, $x = n$, дорівнює площі прямокутника з основою $[n-1; n]$ і висотою n, тобто $\int\limits_{n-1}^{n} \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = n$ для $\forall n \in N$.

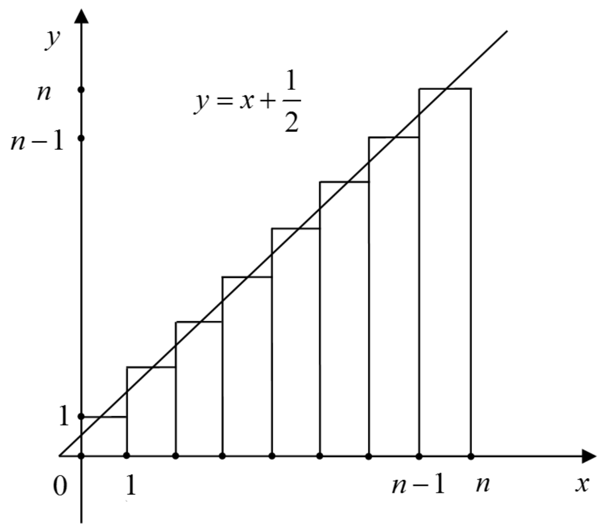

Рис. 1. Рисунок до задачі на обчислення суми $S_1(n)$

Отже, $1+2+\ldots+n=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{k-1}^{k}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\int\limits_{0}^{n}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Запропоновану ідею використаємо для розв'язування більш загальної задачі.

Нехай потрібно суму $S_k(n)$ представити у вигляді многочлена степеня $k+1$. Дана задача буде розв'язаною, якщо вдасться знайти для довільного k многочлен $P_k(x)$ степеня k, такий що $\int\limits_{n-1}^{n}P_k(x)dx=n^k$ для $\forall n\in N$. Тоді шукана сума $S_k(n)=\int\limits_{0}^{n}P_k(x)dx$.

Покажемо, що такий многочлен існує та єдиний. Нехай $P_k(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$. Рівність

$$\int\limits_{n-1}^{n}P_k(x)dx=n^k=\frac{a_0}{k+1}\left(n^{k+1}-(n-1)^{k+1}\right)+\frac{a_1}{k}\left(n^k-(n-1)^k\right)+\ldots+a_k$$

виконується лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях змінної n рівні між собою. Використовуючи біном Ньютона, знайдемо, що $n^m-(n-1)^m=mn^{m-1}-\frac{m(m-1)}{2}n+\ldots+(-1)^{m-1}$. Для визначення коефіцієнтів $a_0,a_1,\ldots,a_k$ отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0=1, \\ -\frac{k}{2}a_0+a_1=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{(-1)^k}{k+1}a_0+\frac{(-1)^{k-1}}{k}a_1+\ldots+a_k=0. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок, тому такий многочлен існує та єдиний.

Приклад. Обчислити суму $1^3+2^3+\ldots+n^3$ [2].

Нехай $P_3(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, такий що $\int\limits_{n-1}^{n}P_3(x)dx=n^3$ $\forall n\in N$.

Маємо, що $\frac{a_0}{4}\left(4n^3-6n+4n-1\right)+\frac{a_1}{3}\left(3n^2-3n+1\right)+\frac{a_2}{2}(2n-1)+a_3=n^3$.

Отримаємо систему

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ -\frac{3}{2}a_0 + a_1 = 0, \\ a_0 - a_1 + a_2 = 0, \\ -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + a_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = \frac{3}{2}, \\ a_2 = \frac{1}{2}, \\ a_3 = 0. \end{cases}$$

Тоді шуканий многочлен має вигляд $P_3(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ і сума $S_3(x) = \int\limits_0^n P_3(x)dx = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Приклад. Знайти суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k$ [2].

Підберемо таку неперервну функцію $f(x)$, що рівність $\int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx = \cos n$ виконується при всіх $n \in N$. Враховуючи вигляд правої частини, функцію $f(x)$ природньо шукати у вигляді гармоніки $f(x) = A\cos(x+\alpha)$.

Маємо, що

$$0 = \int\limits_{n-1}^{n} A\cos(x+\alpha)dx - \cos n = A\sin(n+\alpha) - A\sin(n+\alpha-1) - \cos n =$$

$$= A\sin n\cos\alpha + A\cos n\sin\alpha - A\sin n\cos(\alpha-1) - A\cos n\sin(\alpha-1) - \cos n$$

виконується, якщо коефіцієнти при сінусах та косинусах дорівнюють нулю. Отримаємо систему

$$\begin{cases} A\sin\alpha - A\sin(\alpha-1) - 1 = 0, \\ A\cos\alpha - A\cos(\alpha-1) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $A \neq 0$, то з другого рівняння $\alpha = \frac{1}{2} + \pi m,\ m \in Z$, наприклад, $\alpha = \frac{1}{2}$, тоді з першого рівняння $A = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}$, тому $f(x) = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)$ і

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k = \int\limits_0^n \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) - \sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}} = \frac{\sin n\cos(n+1)}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Приклад. Знайти наближене значення для суми перших членів послідовності $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n, \ldots$ [4]

Розглянемо суму $S_n = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n$. Покажемо, що для цієї суми має місце подвійна нерівність $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{n} \ln x dx < S_n < \int\limits_{1}^{n} \ln x dx$. Для цього на графіку функції $y = \ln x$ проведемо дві ламані: перша складається з прямих, що з'єднують на графіку точки $\ln(k+1)$ і $\ln k$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, друга - з прямих, що є дотичними до точок $\ln 2, \ln 3, \ldots, \ln(n-1)$. Перша ламана, очевидно, лежить нижче від графіка функції $y = \ln x$, друга - вище від нього. Площа фігури, обмеженої першою ламаною, віссю Ox і прямою $x = n$, дорівнює $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \frac{1}{2}(\ln 3 + \ln 4) + \ldots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) = S_n$ і вона, очевидно, менша $\int\limits_{1}^{n} \ln x dx$. Площа другої фігури, обмеженої другою ламаною, віссю Ox і прямими $x = \frac{3}{2}$ та $x = n - \frac{1}{2}$, до якої додано ще прямокутник з шириною $\frac{1}{2}$ і висотою $\ln n$, також дорівнює S_n, і вона більша за $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{n} \ln x dx$.

Оскільки $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$, а значення суми $S_n + \frac{1}{2}\ln n = \ln n!$, то отримаємо $\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{3}{2}\left(1 - \ln\frac{3}{2}\right) < \ln n! < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1$. Позначимо різницю $\ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n = \delta_n$. Тоді $1 - \delta_n$ буде різницею між правою частиною нерівності і $\ln n!$, тобто це площа між графіком логарифма і першою ламаною, тобто послідовність (δ_n) монотонно спадає. З іншого боку, $\frac{3}{2}\left(1 - \ln\frac{3}{2}\right) < \delta_n < 1$, тобто обмежена, отже, вона має границю, що міститься між вказаними числами. Позначимо цю границю через $\ln c$, де $2{,}74 < c < 2{,}75$. Додаткове дослідження дає значення $c \approx \sqrt{2\pi}$.

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k \approx n\ln n + \frac{1}{2}\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}\,.$$

Звідси можна легко отримати відому Стірлінга: $n! \approx \dfrac{\sqrt{2\pi n}\,n^n}{e^n}$, яка дає досить добрі наближення $n!$.

Приклад. Цікавим є застосування визначеного інтеграла для виведення формула Валліса, яке дає значення числа π як нескінченного добутку:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)} \quad \text{або} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots$$

Зокрема, наслідками є наступні формули:

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Для доведення розглянемо інтеграл $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx,\ m\in N$. Інтегруючи його частинами, отримаємо

$$I_m = \begin{bmatrix} u=\sin^{m-1}x, & dv=\sin x\,dx \\ du=(m-1)\sin^{m-1}x\cos x\,dx & v=-\cos x \end{bmatrix} = -\cos x\cdot\sin^{m-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx =$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x(1-\sin^2 x)dx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\,dx - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx = (m-1)\cdot I_{m-2} - (m-1)I_m,$$

Звідси отримаємо рекурентну формулу $I_m = \dfrac{m-1}{m}\cdot I_{m-2}$. Зокрема, при $m=2n$ маємо, що $I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$; при $m=2n+1$ відповідно $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx = \dfrac{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Якщо $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x$. Інтегруючи ці нерівності на $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, одержимо $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx$, або

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}.$$

Оскільки різниця між двома крайніми виразами $\frac{1}{2n(2n+1)}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$ прямує до нуля при $n\to\infty$, то число $\frac{\pi}{2}$ є їх спільною границею:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

Список використаних джерел

1. И. А. Марон. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. - М., Наука, 1970. - 399с.

2. С. Коновалов. Метаморфозы последовательностей / Квант, 1998, №6. - с. 24-26.

3. В. Ясінський, Р.Ушаков. Про один метод знаходження границі числової послідовності певного виду / ЖМШ, №4, 2012. - с. 36-41.

4. М. Кратко. Задача на підсумовування послідовностей / Математика в школі, №10, 2008. - с. 29-34.

5. В. Лейфура, А. Воробйова. Про інтеграл та його застосування до розв'язування задач \ Математика в школі, №3, 2000. - с. 46-51.

6. В. Ясінський, Р. Ушаков. Про один метод знаходження границі числової послідовності певного виду \ Математика в сучасній школі, №4, 2012. - с. 36-41.

Анотація. Олена Мартиненко, Ярослав Чкана. Диференціальне та інтегральне числення в задачах на послідовності. *Метою статті є виділення основних класів задач на послідовності, розв'язання яких потребує переходу до функцій неперервного аргументу, та розкриття особливостей застосування математичного апарату диференціального та інтегрального числення при їх розв'язуванні.*

Ключові слова: метод, послідовність, сума, похідна, інтеграл.

Abstract. Olena Martynenko, Yaroslav Chkana. The differential and integral calculus in problems in sequence. *The article aims to highlight the main classes of problems in sequence, the solution of which requires a transition to a continuous function argument and disclosure features the use of mathematical apparatus of differential and integral calculus in their solving.*

Keywords: *method, sequence, amount, derivative, integral.*

Оксана Медведовская
Доцент кафедры информатики
mksa19@mail.ru

СИСТЕМА СПРАВКИ ПАКЕТА MICROSOFT OFFICE 2016

В сентябре 2015 года В Украине, корпорация Microsoft, представила версию 2016-ть своего пакета Microsoft Office. В последнюю версию пакета внесено достаточно большое количество усовершенствований, что заслуживает подробного рассмотрения. Обновления затронули следующие программы: MS Access, MS Excel, MS OneNote, MS Outlook, MS PowerPoint, MS Visio, MS Project, MS Word.

В первую очередь, привлекает внимание тесная связь обновлённого пакета Microsoft Office со Всемирной сетью. В приложениях 2016 появились такие новые команды как Интеллектуальный поиск, мессенджер Skype, облачные инструменты, одновременная работа в режиме совместного редактирования в OneDrive, возможность отправки данных для дальнейшей обработки в Power BI, встроенная надстройка Power Query, которые подразумевают работу в Интернете из самого приложения.

Что является общим, для всех приложений пакета Office 2016, это абсолютно по-новому оформленная справочная система. Т.к. в предыдущих версиях пакета, команды постоянно меняли своё местоположение, что создавало значительные проблемы по их нахождению, в новой версии Office эта проблема была решена путём значительного усовершенствования системы Справки. Благодаря улучшенной Справке, даже если пользователь не знает местонахождение той или иной команды, он сможет легко вызвать нужную команду, используя новый инструмент Tell me. В Перечень вкладок, можно увидеть новый пункт - Что вы хотите сделать? Эта вкладка содержит два инструмента – Tell me (Что вы хотите сделать?) и Smart Lookup (Интеллектуальный поиск), которых не было в предыдущих версиях пакета. Поэтому, остановимся на этом вопросе для более детального рассмотрения и, проанализируем работу новых инструментов новой справочной системы, предлагаемой Microsoft.

Допустим, что пользователь хотел бы получить справку о вставке оглавления в документ Word. Для этого требуется ввести во вкладке Что вы хотите сделать? слово “оглавление”. Как только пользователь ввёл первые две буквы “ог” в поле Что вы хотите сделать? сразу же Word предлагает следующие варианты:

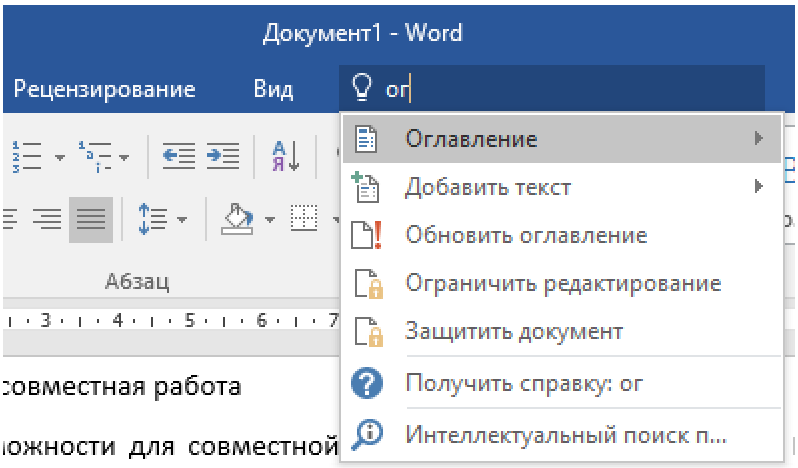

Рис.1

Предположим, ни один из вариантов пользователя не устраивает, поэтому поиск следует продолжить, прописывая во вкладке Что вы хотите сделать? полностью слово “оглавление”. Варианты, которые предлагает Word изменились. Появились новые команды:

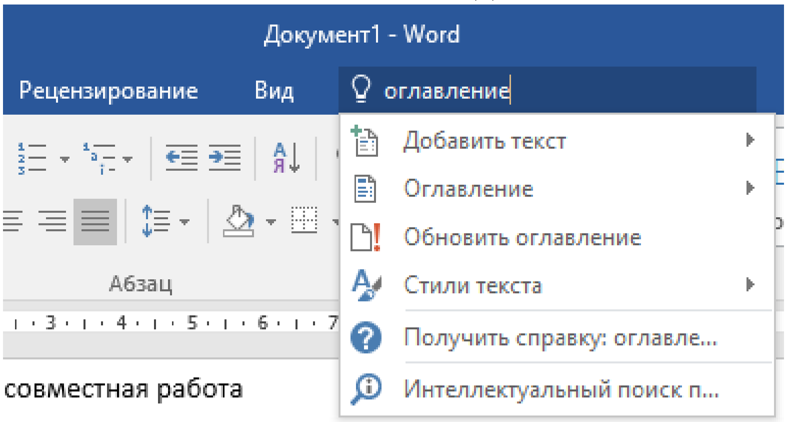

Рис.2

Допустим, что ответ на требуемый запрос вновь не получен. В этом случае, используя команду Получить справку, следует перейти к общей справочной системе Microsoft, размещённой в Интернете.

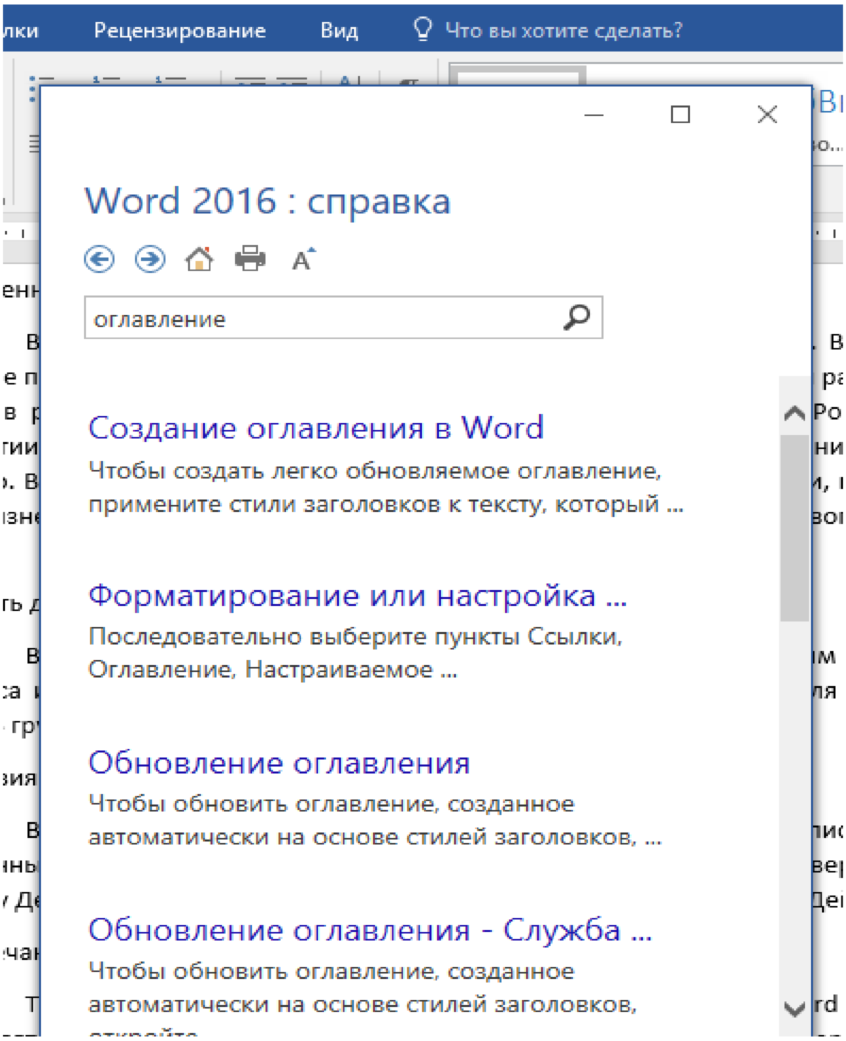

Рис.3

Итак, новая справочная система стала более гибкой, функция Tell me, начинает предлагать варианты ответа уже при вводе первых буквы запроса, т.е. пользователю можно не знать правильное название искомой команды, достаточно ввести в поле Tell me запрос на то, что он хочет сделать. К сожалению, данный метод поиска необходимой информации не может быть использован в качестве обучающего метода, т.к. он нарушает один из основных принципов дидактики – принцип прочности в овладениях знаниями, умениями и навыками.

Вторым новым инструментом справочной системы пакета Office 2016, является функция Интеллектуальный поиск. Вызвать команду Интеллектуальный поиск, можно несколькими способами: из вкладки Что вы хотите сделать? (последний пункт раскрывающегося меню), из вкладки Рецензирование и из контекстного меню. Для того чтобы воспользоваться этой командой достаточно либо оставить курсор на том слове, справку по которому Вы хотите получить, либо выделить словосочетание, по которому требуется найти справку, целиком.

Использование новой команды - Интеллектуальный поиск, которая частично заменила команду Помощник, встроенную в предыдущих версиях пакета, сделало возможным поиск информации об интересующем фрагменте текста непосредственно в рабочем окне приложения, с использованием поисковой системы "Bing".

Проанализировав работу двух новых инструментов пакета Microsoft Office – 2016 Tell me и Smart Lookup становится очевидным, что обновлённая система Справки стала более совершенной, комфортной, однако, обращаться пользователю по каждому возникшему вопросу, при работе над документом в программе Word, за справкой текстового редактора, не рационально. Это замедляет работу с документами и делает её малоэффективной, поэтому, обучающая роль педагога в компьютерном классе становится очевидной, особенно, при изучении нового материала, каким является, в настоящее время пакет Office - 2016.

Работа над приложениями пакета Office – 2016 не закончена, она продолжается, на сайте Microsoft https://support.office.com практически ежемесячно размещаются обновления, с которыми может ознакомится любой пользователь.

Список использованных источников

1. Новые и улучшенные возможности в Office 2016 с Office 365/ [Электронной ресурс] Режим доступа: https://support.office.com/ru-ru/article

Анотация. Медведовсая О. Система справки пакета Microsoft Office 2016. *В статье описана система Справки пакета Microsoft Office – 2016, рассмотрены способы использования двух новых инструментов справочной системы – Что вы хотите сделать? и Интеллектуальный поиск. Обращено внимание на особенности использования новой системы Справки пакета MS Office.*

Ключевые слова: *Microsoft Office – 2016, Интеллектуальный поиск, Что вы хотите сделать?, Справка.*

Анотація. Медведовська О. Система довідки пакету Micrisoft Office 2016. *В статті описана система Довідки пакету Micrisoft Office 2016, розглянуті способи використання двох нових інструментів довідкової системи Что вы хотите сделать? та Интеллектуальный поиск. Звернено увагу на особливості використання нової системи Справки пакету MS Office.*

Ключові слова: *Microsoft Office – 2016, Интеллектуальный поиск, Что вы хотите сделать?, Справка.*

Abstract. Medvedovskaya O. The help system of a packet Microsoft Office 2016. *The article describes the Help system of Microsoft Office - 2016, it considers the methods of using two new tools help system - Tell me? and Smart Lookup. It pays attention to the features of using the new system of MS Office Help.*

Keywords: *Microsoft Office – 2016, Tell me, Smart Lookup, Help.*

І.О. Мороз
професор кафедри фізики та методики навчання фізики

ОСНОВНІ ВИМОГИ ДО ЗМІСТУ ТА ОФОРМЛЕННЯ ПРОГРАМ ЕЛЕКТИВНИХ КУРСІВ З НАНОТЕХНОЛОГІЙ

Зміст курсу за вибором з нанотехнологій повинен відповідати віковим та пізнавальним можливостям учнів, розвивати їх мотивацію до здобуття нанотехнологічних знань.

Зміст курсу може являти собою:

– розширений, поглиблений варіант якогось розділу фізики («Наномеханіка», «Квантова нанофізика», «Нанометеріали» і т.д.);

– введення в одну з супутніх фізиці наук, професій («Наноелектроніка», «Нанодіагностика», «Біомеханіка» і т.д.);

– сукупність фрагментів з різних розділів фізики та інших предметів, якщо курс орієнтований на певний рівень узагальнення (наприклад, «Введення в нанотехнології», «Нанотехнології в нашому житті») або освоєння певного виду діяльності (наприклад, «Лабораторний практикум з фізики наноматеріалів»).

У науково-методичній літературі умовно виділяють два основних види елективних курсів: предметно-орієнтовані та міжпредметні.

Зміст програм предметно-орієнтованих елективних курсів містить у собі поглиблене вивчення окремих тем базових загальноосвітніх програм і забезпечує підвищений (поглиблений) рівень вивчення того чи іншого навчального предмета.

Зміст програм міжпредметних елективних курсів виходить за межі традиційних навчальних предметів. Вони знайомлять учнів з комплексними проблемами і завданнями, які потребують синтезу знань з різних предметів, методами їх розробок в різних професійних сферах, сприяють професійній орієнтації, усвідомленню можливостей і способів реалізації життєвих планів.

При відборі змісту елективного курсу з нанотехнологій необхідно з'ясувати: які закони, теорії, ідеї, принципи, поняття, уміння, навички, види учнівської діяльності пропонуються для засвоєння, яким чином навчальний матеріал буде сприяти профільній спеціалізації навчання і формуванню профільних умінь і навичок, зокрема в галузі нанотехнологій; для яких саме професій, галузей діяльності потрібен відібраний зміст, що учні мають попередньо знати та вміти перед вивченням елективного курсу.

Ми вважаємо, що зміст програм курсів за вибором з нанотехнологій в основній школі має відповідати таким критеріям:

– структурна побудова курсу має забезпечити використання активних форми організації занять, інформаційних, проектних форм роботи;

– зміст курсу, форма його організації повинні допомогти учневі через успішну практику оцінити свій потенціал з точки зору освітньої перспективи;

– добираючи зміст курсу, вчитель повинен сам собі відповісти на питання: «Чому учень вибере саме цей курс, а не інший? Чим він буде йому корисний, цікавий?»;

– зміст елективного курсу повинні сприяти створенню позитивної мотивації;

– зміст елективних курсів повинен мати міждисциплінарний характер;

– програма курсу повинна складатися з ряду закінчених модулів.

Особливу увагу доцільно приділити розробці навчальних програм елективних курсів.

Навчальна програма – нормативний документ, у якому відображено мету, зміст, особливості оцінки ефективності результатів процесу навчання конкретного навчального курсу.

У процесі розробки програм елективних курсів з фізики в основній школі учитель має керуватись принципами формування змісту цих курсів. Зокрема, для елективних курсів природничого профілю вони зводяться до:

1) формування цілісної наукової картини світу, системного мислення з урахуванням методологічних принципів і теорії пізнання;

2) розширення меж чинних загальноосвітніх курсів (міжпредметні зв'язки, інтеграція знань);

3) поглиблення змісту чинних курсів (цей принцип має особливо важливе значення при побудові курсів, орієнтованих на особливо обдарованих дітей);

4) науковість як загально-дидактичний принцип;

5) практична спрямованість і прагматичний підхід;

6) інтегративний характер;

7) адресний характер (зміст курсів має бути націлений адресно, до конкретного учня, який вибрав собі даний спецкурс);

8) розвивальний принцип (елективні курси покликані розвивати пізнавальну самостійність, дослідницькі вміння і навички);

9) урахування вікових особливостей школярів;

10) урахування регіональних особливостей, що дозволяє зробити навчання більш цікавим для учнів [1].

Програма елективного курсу має включати наступні структурні елементи**:**

– титульний лист;

– пояснювальну записку;

– змістову частину;

– методичні рекомендації;

– додатки [2].

Зокрема, на титульному листі зазначається:

– назва навчального закладу;

– прізвище та ініціали відповідального працівника навчального закладу, який затверджував програму, його посада;

– дата затвердження навчальної програми;

– назва елективного курсу;

– вид курсу за вибором (предметний чи міжпредметний);

– вікова категорія дітей, на яких розрахована програма;

– термін реалізації програми курсу за вибором;

– автор навчальної програми та його посада;

– назва населеного пункту;

– рік складання навчальної програми.

В пояснювальній записці програми курсу за вибором має бути зазначено:

– актуальність програми, обґрунтування її необхідності;

– мета і завдання програми;

– обґрунтування вибору змісту;

– загальна характеристика навчального процесу;

– форми та методи навчання;

– предметні та міжпредметні зв’язки;

– інформація про учнів, на яких розрахована програма;

– характеристика тимчасових і матеріальних ресурсів;

– очікувані результати;

– інформація про апробацію програми [2].

Пояснювальна записка елективного курсу з нанотехнологій в основній школі має розкривати освітню галузь, до якої входить даний курс за вибором, предмет вивчення; функції даного курсу за вибором; специфіку і значення для вирішення задач допрофільної підготовки учнів з фізики та нанотехнологій зокрема; відмінні особливості даної програми від наявних.

Змістова частина програми повинна містить:

– послідовний перелік тем з їх коротким змістом, кількість годин, необхідних на їх вивчення;

– список демонстраційних, практичних і лабораторних робіт, екскурсій.

В методичних рекомендаціях зазначають:

– основні змістові компоненти кожного розділу чи теми;

– опис технологій і методик навчання до кожної теми;

– вимоги до рівня загальних умінь і навичок учнів під час навчання;

– форми і методи контролю.

В додатках до навчальної програми курсу за вибором має бути:

– календарно-тематичне планування;
– дидактичні матеріали;
– список рекомендованої літератури;
– орієнтовний перелік обладнання;
– дискети з електронними матеріалами [2].

Календарно-тематичний план подається у вигляді таблиці, де зазначаються назви тем, кількість годин на теми (лекційних, практичних), форма проведення занять та освітній продукт. Під освітнім продуктом розуміють матеріали, які будуть розроблені учнями в процесі пізнавальної, дослідницької діяльності: конспекти, тези, результати експерименту, історичний аналіз, графіки, малюнки, макети, моделі тощо.

Дидактичний матеріал повинен включати оптимальну систему навчально-методичної документації і засобів навчання, необхідних для повного і якісного вивчення елективного курсу у рамках відведеного часу. Зміст дидактичних матеріалів має відповідати особливостям навчально-пізнавальної діяльності учнів, забезпечити одержання міцних знань, умінь і навичок, надавати допомогу у формуванні навичок самостійної роботи, пізнавальної активності, інтересу до обраного курсу.

Список рекомендованої літератури містить перелік посібників, необхідних педагогам та учням для використання в навчально-виховному процесі. Крім того, у списку літератури для вчителя і учнів мають бути сучасна навчальна та довідкова література.

Орієнтовний перелік обладнання – це перелік матеріально-технічного забезпечення навчально-виховного процесу. Він складається відповідно до Типового переліку навчально-наочних посібників і технічних засобів навчання для позашкільних навчальних закладів системи Міністерства, затвердженого наказом від 08.01.2002 №5, відповідних нормативних положень.

Елективні курси, як правило, носять авторський характер. Тобто, взявши за основу типові навчальні програми, вчителі можуть самостійно розробити авторські та модифіковані програми курсів за вибором.

М*одифіковані* програми – це програми, розроблені на основі наявних навчальних програм, але змінені й доповнені у змісті предмета, послідовності вивчення тем, кількості годин, використанні організаційних форм навчання тощо.

Авторська програма – це спроектований самим учителем (автором, кількома авторами) на основі власної методичної концепції зміст елективного курсу навчальної діяльності, спрямований на модернізацію шкільного регіонального компонента освіти й одержання вагомих результатів. [27]

Вчитель розробляючи програму елективного курсу повинен розуміти, що невеликий обсяг програми не знижує вимог до її складання.

Включення авторських і модифікованих програм в освітній процес навчального закладу потребує дотримання певних процедур:

- попереднє рецензування програми;
- апробація (на рівні закладу);
- експертиза;
- затвердження.

Програми курсів за вибором розглядає методичне об’єднання вчителів-предметників. Виносить рішення про відповідність програм існуючим вимогам навчального закладу, про доцільність їх введення в навчальний план (шкільний компонент) та винесенні на затвердження педагогічною радою або директором навчального закладу.

Авторські програми, що представляють інтерес не тільки для однієї конкретної школи, а й для допрофільної підготовки в інших освітніх установах, подаються на експертизу до обласного інституту післядипломної педагогічної освіти та погоджуються управлінням освіти і науки облдержадміністрації [3].

Усі програми потребують проходження науково-методичної експертизи фаховою комісією Міністерства освіти і науки України.

Приступаючи до складання програми елективного курсу з нанотехнологій, вчителям корисно:

- проаналізувати зміст діючих навчальних програм з основ нанотехнологій;
- встановити, чим зміст курсу буде відрізнятися від базового, тобто розкрити новизну змістового матеріалу для учнів;
- визначити тему, зміст, цілі, завдання та функції запропонованого курсу;
- поділити на блоки зміст програми, розділи, теми і дати до них погодинну розбивку;
- запропонувати форми і методи роботи з учнями для реалізації завдань програми елективного курсу та завдання допрофільної підготовки;
- зазначити основні види діяльності учнів, зокрема для практикумів, лабораторних дослідів, експериментів;
- показати можливості самостійної діяльності учня при вивченні курсу;
- з'ясувати можливості методичного і матеріально-технічного забезпечення вивчення пропонованого курсу;
- вказати навчальну, довідникову та методичну літературу, якою зможуть користуватися вчителі та учні;
- визначити, форму звітності учнів після завершення курсу (освітні продукти, які мають бути створені учнями як результат опанування курсу);
- визначити критерії оцінювання знань з програми курсу [2].

Програма елективного курсу має сприяти реалізації основних дидактичних принципів, а також принципу врахування вікових особливостей та індивідуальних можливостей учнів. Крім того, в програмі має бути передбачено використання різних видів діяльності при вивченні елективну, таких як: проектна технологія, моделювання тощо.

Отже, укладаючи програму елективного курсу, вчителю необхідно врахувати: новизну змістового матеріалу для учнів; мотиваційний потенціал та розвивальний потенціал програми; повноту змісту; логічність і послідовність викладеного матеріалу; практичну направленість змісту; форми і методи роботи з учнями; забезпечення елективного курсу навчальною, довідниковою, методичною літературою; в чому учень може виявити ініціативу при вивченні курсу; критерії, які дозволяють оцінити успіхи у вивченні даного курсу; який освітній продукт має бути створений учнем після завершення курсу.

Література

4. Липова Л. А. Спеціальні (елективні) курси як змістовий блок профільного навчання [Текст] / Л. Липова, В. Малишев, О. Рибіцька // Рідна школа. - 2006. - N3. - С.

5. Положення «Про елективні курси допрофільної підготовки та профільного навчання учнів» від 20.03.2007р. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://yarmolrmk.at.ua/doc/elektuvn_kyrsu.doc .

6. Савицька, О. С. Особливості впровадження елективних курсів в систему профільної технологічної освіти / О.С. Савицька // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 5 «Педагогічні науки: реалії та перспективи». – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – Вип. 31. – С. 217–222.

Ольга Пасько

старший викладач кафедри фізики та методики навчання фізики

МІСЦЕ НАНОТЕХНОЛОГІЙ В ОСВІТНІЙ ПІДГОТОВЦІ ВИПУСКНИКІВ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Входження України в загальноєвропейський освітній простір потребує пошуку та впровадження в навчальний процес сучасних досягнень фізичної науки, зокрема, нанотехнологій. Сучасний розвиток науки і техніки, а також і повсякденне життя зараз не можна уявити без пристроїв, у яких використовуються нанорозмірні матеріали. Нанотехнології – це передовий і перспективний напрямок, з яким пов’язують майбутнє мікроелектроніки, робототехніки, нейротехніки та інших галузей.

Блискавичний розвиток нанотехнологій та перспектива їх впровадження у виробництво стимулює ознайомлення з їх основами ще зі шкільного віку. Тому сьогодні є реальна потреба у розробці та впровадженні в навчальний процес педагогічних ВНЗ курсів з нанотехнологій.

Аналіз навчальних програм з фізики [1] показує, що для формування цілісної картини світу і підготовки учнів до усвідомленого сприйняття принципово нового підходу до дослідження структури речовини, а також створення нових матеріалів, обсяг годин, що відводяться на знайомство школярів з об'єктами наносвіту під час викладання зазначених дисциплін, вкрай мізерний. Так, питання, пов’язані з нанотехнологіями у шкільному курсі фізики розглядаються лише у межах узагальнюючих занять в 11 класі. На їх проведення на профільному рівні відведено загалом – 4 години, на академічному – 2, на рівні стандарту – не передбачено взагалі. Під час цих занять, поряд з узагальненнями, пов’язаними з формуванням фізичної картини світу, заплановано ознайомлення учнів із сучасними уявленнями про будову речовини, сучасними методами її дослідження, а також з поняттями «нанокомпозити» і «нанотехнології». Поряд із цим, у програмних вимогах до рівня загальноосвітньої підготовки школярів відсутні конкретно сформульовані результати навчання щодо основних понять нанонауки, лише абстрактно вказано: «… в учнів формуються сучасні уявлення про будову речовини…» та «…усвідомлюють роль фізичного знання… у створенні нової техніки і наукомістких технологій».

Оптимальним, на наш погляд, варіантом вирішення зазначеної проблеми є розробка та впровадження у навчальний процес основ нанотехнологій у формі елективного курсу. Колективом викладачів кафедри фізики та методики навчання фізики розроблений елективний курс «Основи нанотехнологій» для учнів старшої школи загальноосвітніх навчальних закладів.

Науково-методичне забезпечення навчального процесу передбачає державні стандарти освіти, навчальні плани, навчальні програми з навчальних дисциплін. Тому розробка нормативних документів, які визначали б зміст освіти у галузі нанотехнологій, передусім Державних стандартів освіти, є вимогою часу. Впровадження таких стандартів дозволить задовольнити попит на відповідних фахівців та домогтися підвищення рівня їх підготовки. Доки державні вимоги не сформульовані, справедливо керуватися стандартизацією в області нанотехнологій [2].

Міждисциплінарний курс «Основи нанотехнологій», спрямований на розв’язання протиріччя, яке виникло нині між новими потребами суспільства у кваліфікованих фахівцях у галузі нанотехнологій та змістом традиційної системи освіти, має на меті ознайомлення молодого покоління із сучасними досягненнями науки у галузі нанотехнологій: отримання наноматеріалів, створення на їх основі нових приладів та пристроїв для потреб підприємств в різних галузях економіки.

Серед основних завдань курсу можна виділити такі: розширити уявлення школярів про фізичну картину світу на прикладі знайомства з властивостями нанооб'єктів; познайомити учнів з історією виникнення нанотехнологій; сформувати поняття «нанооб'єкт», «наноматеріал»; сформувати уявлення про унікальні властивості наноматеріалів та їх застосування; ознайомити учнів з методами створення нанооб'єктів; ознайомити з основними інструментами дослідження нанооб'єктів та наноматеріалів; сформувати уявлення про практичне значення розвитку нанотехнологій для електроніки, оптоелектроніки, космічної техніки, комп'ютерної техніки, військової справи і т. д.; знайомство учнів з перспективами розвитку нанотехнологій і пробудження в них зацікавленості до реалізації власних зусиль в галузі нанотехнологій.

Головним результатом вивчення відповідної дисципліни, поряд із формуванням освітніх компетентностей, має стати просилення інтересу школярів до даної проблематики, розвиток їх прогресивного наукового мислення, сприяння формуванню уявлень про фундаментальну єдність природничих наук, незавершеність пізнання в області природознавства, перспективи його подальшого розвитку, ролі нанотехнологій в реалізації потреб людства.

Однією з найперших вимог до впровадження у навчальний процес основ нанотехнологій є структурування змісту відповідної навчальної дисципліни. Складовою інформаційно-аналітичної підготовки старшокласників в області нанотехнологій мають стати: 1) знання ключових понять нанотехнологій (нанооб'єкт, наноматеріал); 2) розвиток умінь і навичок використання сучасних методів аналізу структури речовини; 3) розуміння перспектив використання нанопродуктів в різних галузях науки і виробництва.

Зміст курсу «Основи нанотехнологій» наведено у схемі на рисунку 1.

Рис. 1. Зміст курсу «Основи нанотехнологій»

З метою забезпечення сучасного рівня викладання нанотехнологій та у зв'язку з відсутністю у загальноосвітніх навчальних закладах необхідного матеріального забезпечення, на базі лабораторій «Інноваційних технологій викладання фізики», «Композиційних матеріалів» та «Фізики тонких плівок» започаткованний Регіональний науково-освітній центр колективного користування «Нанотехнолог» Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка. Центр забезпечує використання сучасного наукового обладнання для проведення лабораторних занять з учнями та вчителями загальноосвітніх навчальних закладів та студентами регіону.

Таким чином, протиріччя, яке виникло нині між новими потребами суспільства у кваліфікованих фахівцях у галузі нанотехнологій та змістом традиційної системи освіти, може бути успішно розв'язане шляхом впровадження у навчальний процес загальноосвітніх та вищих навчальних закладів нових міждисциплінарних курсів, пов'язаних з розвитком нанотехнологій.

Список використаних джерел

1. Пасько. О.О. Місце нанотехнологій у навчальних програмах з фізики та стандартах загальної середньої освіти – перспективи розвитку. / О.О. Пасько, О.Є. Аврамчук / Вісник Чернігівського національного

педагогічного університету. Вип. 127. (Серія педагогічні науки). / – Чернігів : ЧНПУ, 2015. – С. 160-162.
2. Standards catalogue. 17: Metrology and measurement. Physical phenomena. [Electronic resource]. - Access mode : http://www.iso.org/iso/catalogue_-ics_browse?ICS1=17&
3. Pas'ko O. Incorporating the basics of Nanoscale Science and Technology in the cycle of Natural and Mathematical Sciences of Secondary School. / О. Пасько / Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2015»: матеріали ІІ Міжнародної науково-методичної конференції: у 3 ч. Ч. 3 / упорядн. Чашечникова О.С. – Суми : видавничо-виробниче підприємство «Мрія», 2015. –с. 54-55.

Анотація. Пасько О.О. Місце нанотехнологій в освітній підготовці випускників загальноосвітніх навчальних закладів. *У статті досліджено стан викладання у загальноосвітніх навчальних закладах питань, пов'язаних із розвитком нанотехнологій, проведено аналіз навчальних програм з фізики. Обґрунтована доцільність розробки та впровадження у навчальний процес основ нанотехнологій у формі елективних курсів.*

Ключові слова: *нанотехнології, нанооб'єкт, наноматеріал, елективний курс.*

Abstract. *The article deals with the problem of teaching nanotechnology in secondary school. There are analysis of the physics curriculum in the article. The author justifies that revealed a very small number of hours spent on nanotechnology teaching. The publication prompted the inclusion in the learning process disciplines of physics, certain issues of nanotechnology related to specific learning material, through the use of reserve training time as one of the solutions to this problem. The author substantiated expediency of development of elective courses in nanotechnology and their implementation in the educational process of secondary and higher educational institutions. Article formulated requirements for the implementation of the learning process based on nanotechnology. First of all it is structuring of the course content.*

Key words: *nanotechnology, technological structure, nano-objects, nanostructured material, elective course.*

Сергій Петренко
Викладач кафедри інформатики
s.petrenko@fizmatsspu.sumy.ua

ВИКОРИСТАННЯ ПЛАТФОРМИ MOODLE В ОСВІТНЬОМУ ПРОЦЕСІ

В наш час достатньо швидкими темпами розвиваються як технології так і нові методики навчання. Найбільш популярними стають методики дистанційного навчання з використанням Інтернет технологій. Розвиток мережі Інтернет і сучасних засобів зв'язку та обміну даними дозволили застосувати в навчальному процесі нетрадиційні методи навчання.

Глобалізаційні процеси в економіці вимагають створення глобального міжнародного освітнього середовища, головною перевагою якого є представлення навчального матеріалу в дидактично уніфікованому й формалізованому вигляді та надання можливості його використання у будь-якому місці і у будь-який час незалежно від форми навчання студента. Одним із варіантів, що дозволяє вирішити поставлене завдання, є програмна платформа Moodle, яка представляє собою систему управління вмістом сайту, розробленим спеціально для створення якісних електронних навчальних курсів (ЕНК) викладачами.

MOODLE (Modular Object Oriented Distance Learning Environment) – це назва системи програмних продуктів CLMS (Content Learning Management System), дистрибутив якої розповсюджується безкоштовно за принципами ліцензії Open Source [2, с. 8]. За допомогою цієї системи студент може дистанційно, через Інтернет, ознайомитися з навчальним матеріалом, який може бути представлений у вигляді різнотипних інформаційних ресурсів (текст, відео, анімація, презентація, електронний посібник), виконати завдання та відправити його на перевірку, пройти електронне тестування. Викладач має змогу самостійно створювати дистанційні електронні курси і проводити навчання на відстані, надсилати повідомлення студентам, розподіляти, збирати та перевіряти завдання, вести електронні журнали обліку оцінок та відвідування, налаштовувати різноманітні ресурси курсу і т.д.

Доступ до ресурсів платформи дистанційного навчання Moodle – персоніфікований. Логін та пароль доступу студенти та науково-педагогічні працівники отримують тільки у адміністратора платформи в ручному режимі. Для реєстрації потрібно мати реальну електронну адресу. Педагогічний працівник отримує доступ лише до тих електронних навчальних курсів які створені під його обліковим записом. Студент отримує доступ лише до тих курсів на яких він зареєстрований для участі у навчальному процесі. Реєстрація студентів на електронний навчальний курсі здійснюється викладачем цього курсу або адміністратором платформи. По закінченні навчання за програмою курсу викладач або адміністратор відраховують студентів з числа його учасників [1, с. 5].

Електронний навчальний курс – це комплекс навчально-методичних матеріалів та освітніх послуг, створених для організації індивідуального та групового навчання з використанням дистанційних технологій[3].

ЕНК принципово відрізняється від інших цифрових навчальних ресурсів тим, що повинен відповідати чітким методичним критеріям:

1) чітка структурованість навчально-методичних матеріалів;

2) система інтерактивної взаємодії викладача і студента, студентів між собою, організована з використанням ресурсів ЕНК, протягом всього часу вивчення дисципліни;

3) розклад виконання студентами навчального плану;

4) система контролю виконання всіх видів навчальної діяльності.

Електронні навчальні курси, які розробляються на платформі дистанційного навчання Moodle, складаються з електронних ресурсів двох типів:

1) ресурси, призначені для подання студентам змісту навчального матеріалу, наприклад, електронні конспекти лекцій, мультимедійні презентації лекцій, методичні рекомендації тощо;

2) ресурси, що забезпечують закріплення вивченого матеріалу, формування вмінь та навичок, самооцінювання та оцінювання навчальних досягнень студентів, наприклад, завдання, тестування, анкетування, форум тощо).

Всі електронні навчальні курси, розміщені на навчальному порталі, бажано розмішати в уніфікованому вигляді який включає:

- загальну інформацію про навчальну дисципліну (робоча програма, календарний план, критерії оцінювання, друковані та Інтернет-джерела, глосарій, оголошення);
- навчально-методичні матеріали з кожного модуля:
    - теоретичний матеріал (мультимедійні презентації лекцій, структуровані електронні навчальні матеріали, електронний конспект лекцій, аудіо-, відео-, анімаційні навчальні ресурси, список друкованих та Інтернет-джерел);
    - практичні (семінарські, лабораторні) роботи (зміст, методичні вказівки щодо їх виконання, список індивідуальних завдань, форма подання результатів виконання, критерії оцінювання);
    - завдання для самостійної роботи студентів (додатковий теоретичний матеріал, завдання, методичні вказівки щодо їх виконання, список індивідуальних завдань, форма подання результатів виконання, критерії оцінювання);
    - матеріали для самоконтролю та поточного контролю (контрольні запитання, завдання з критеріями оцінювання та

формою подання результатів виконання, тести для самоконтролю та контролю);
- матеріали для проведення підсумкового контролю (контрольні запитання, тести для самоконтролю, підсумковий тест для атестації студента з дисципліни);
- інші матеріали.

Електронні навчальні курси можуть бути успішно використані як елементів навчання для студентів денної форми. Для студентів дистанційної форми навчання електронні навчальні курси значно збільшують ступінь контактності з викладачем як для діагностики навчальних досягнень так і для отримання консультацій.

Список використаних джерел

1. Анисимов А.М. Работа в системе дистанционного обучения MOODLE / А.М. Анисимов //Учебное пособие. 2-е изд. испр. и дополн. – Харьков, ХНАГХ, 2009, - 292 стр.
2. Белозубов А.В., Николаев Д.Г. Система дистанционного обучения Moodle // А.В.Белозубов, Д.Г.Николаев, Учебно-методическое пособие, Редакционно-издательский отдел СПбГУ ИТМО - СПб., 2007. - 108 с.
3. Положення про електронний навчальний курс // Електронний ресурс, (режим доступу http://moodle.nauu.kiev.ua/)

Анотація. Петренко С. Використання платформи Moodle в освітньому процесі. *В статті розглядаються питання можливості використання в освітньому процесі елементів дистанційного навчання на базі платформи дистанційного навчання Moodle. Пропонується варіант уніфікації електронних навчальних курсів.*

Ключові слова: *дистанційне навчання, електронний навчальний курс, Moodle, платформа дистанційного навчання.*

Abstract. Petrenko S. The use of the Moodle platform in the educational process. *The article discusses the possibility of use in educational process of elements of distance learning platform distance learning Moodle. Proposes a variant of the standardization of e-learning courses.*

В.Д. Погребний
доцент кафедри математики

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ МНОЖИН: РІЗНІ АСПЕКТИ

Метою даної статті є розгляд різних аспектів важливого математичного поняття – обмеженості множин. Це поняття дійсно має різні аспекти, що відображають у різних ситуаціях різні властивості множин, що розглядаються у математиці.

Першоджерелом поняття обмеженості, звичайно, є геометрія, тут маємо наглядний аспект цього поняття. Але строге формулювання вже повинно використовувати строгі математичні поняття і факти. Отже:

1. Множина A на прямій обмежена, якщо вона входить в деякий скінчений проміжок: $A \subset \langle a, b \rangle, a, b \in R, a < b$.

2. Множина A на площині обмежена, якщо входить в деякий круг: $A \subset \omega_2(0, r)$ (круг можна брати відкритим чи замкненим).

3. Множина A у просторі обмежена, якщо входить у деяку кулю: $A \subset K(0, r)$ (цю кулю теж можна брати відкритою чи замкненою).

Математика вимагає переходу до більш загальних просторів, які є моделями більш складних реальних процесів. Аналіз вищенаведених геометричних аспектів обмеженості показує, що основою всюди є відстань між точками:

1. На прямій, відстань між точками $M(x)$ та $P(y)$ є число $\rho(M, P) = |x - y|$

2. На площині: $M(x_1, y_1)$, $P(x_2, y_2)$, $\rho(M, P) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

3. У просторі: $M(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$,

$$\rho(M, P) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Природнім узагальненням є розгляд $n-$вимірного евклідового простору $E^n, n \geq 1$, що є узагальненням прямої, площини, геометричного тривимірного простору. Узагальненням геометричної відстані є метрика $\rho(M, P) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (v_1 - v_2)^2}$, де $M(x_1, y_1, ..., v_1)$, $P(x_2, y_2, ..., v_2)$. Обмеженість множини означає, що $A \subset K(O, r)$, де $O(0,0,...,0), r > 0$, куля визначається умовою $K(0, r) = \{M \in E^n : \rho(M, 0) \leq r\}$.

Можливість дальшого узагальнення достатньо прозора: розглядати ті множини, де можна ввести «відстань» - метрику іншим, неевклідовим способом. Звичайно, ця метрика повинна задовольняти деякі умови – аксіоми метрики, джерела яких, знову таки в геометрії:

М1. Невід'ємність. $\forall M, P[\rho(M, P) \geq 0]$.

М2. Віддільність. $\rho(M, P) = 0 \Leftrightarrow M = P$.

M3. Симетричність. $\forall \mathrm{M},\mathrm{P}[\rho(\mathrm{P},\mathrm{M})=\rho(\mathrm{M},\mathrm{P})]$.

M4. Нерівність трикутника. $\forall \mathrm{M},\mathrm{P},\mathrm{T}[\rho(\mathrm{M},\mathrm{T})\le\rho(\mathrm{M},\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},\mathrm{T})]$.

Це дає можливість у одержаній структурі (X,ρ), яка має назву метричного простору, розглядати кулі і обмеженість множин, хоча наглядності, як у геометрії, вже немає. Наприклад, у метричному просторі $\mathrm{C_L}[a,b]$ функцій неперервних на $[a,b]$ з метрикою $\rho(f,g)=(R)\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ можна розглядати обмежені множини функцій.

Модуль дійсного числа, через який розглядається відстань на прямій має, крім метричного аспекту $|x|=\rho(\mathrm{O},\mathrm{M})$, $\mathrm{M}=\mathrm{M}(x)$ і інший аспект – порядковий. В упорядкованих просторах розглядаються обмежені множини [4, с. 20]. Обмеженість множини $\mathrm{A}\subset\mathrm{X}$ в упорядкованому просторі X має інший смисл: A обмежена і зверху, і знизу. Тобто $\exists a\in\mathrm{X}$, $\exists b\in\mathrm{X}: a\le x\le b \quad \forall x\in\mathrm{X}$. Теорія упорядкованих просторів являє собою велику і важливу математичну науку. Про цей аспект упорядкованості далі говорити не будемо, це окреме велике питання. Повернемось до метричного аспекту упорядкованості.

Поряд з порядковими структурами, головною математичною структурою є алгебраїчна, а також топологічна. Поєднанням метричної і топологічної структур є метричний лінійний простір [4, с. 22], в якому алгебраїчна і метрична структури узгоджені за допомогою аксіом, алгебраїчні операції додавання і множення на число неперервні в даній метриці:

1. $x_n\to x_0, y_n\to y_0\Rightarrow x_n+y_n\to x_0+y_0$

2. $\lambda_n\to\lambda_0, x_n\to x_0\Rightarrow\lambda_n x_n\to\lambda_0 x_0$.

Прикладом метричного лінійного простору є простір S послідовностей $(a_n)_{n\in N}$ з метрикою $\rho(a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|}, a=(a_n)_{n\in N}, b=(b_n)_{n\in N}$.

В метричних лінійних просторах можна також розглядати обмежені множини – по даній метриці.

Найважливішим класом метричних лінійних просторів є нормовані лінійні простори, де кожному елементу $x\in X$ ставиться у відповідність дійсне число $\|x\|$ – його норма, що є узагальненням геометричної довжини вектора. Повинні виконуватись аксіоми норми.

N1. Невід'ємність. $\forall x\in X[\|x\|\ge 0]$

N2. Віддільність. $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$ (нульовий вектор).

N3. Абсолютна однорідність. $\forall\lambda\in R(C)\forall x\in X[\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|]$

N4. Субаддитивність. $\forall x,y\in X[\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|]$

В цих просторах $\|x-y\|$ є метрика $\rho(x,y)$. Отже, можна розглядати обмеженість множин. $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ обмежена, якщо $\exists \alpha_0 > 0 : \|x\| \le \alpha_0 \;\; \forall x \in A$.

Узагальненням метричних лінійних просторів є топологічні лінійні простори. Це поєднання лінійної і топологічної структур. Топологічні простори – це простори, у яких кожній точці відповідає система її околів, що задовольняє певні аксіоми. Топологічну структуру можна ввести різними способами, наприклад, аксіоматично задавши відкриті множини [3, с. 79]. Топологічний лінійний (або векторний) простір – це лінійний простір, що одночасно є і топологічним простором, і обидві структури узгоджені аксіомами: лінійні операції $x+y$, λx неперервні в вихідній топології $\tau(X)$. В топологічних лінійних просторах означається своє поняття обмеженої множини. Розглянемо його.

Нехай X – топологічний лінійний простір, $M \subset X$. Кажуть, що множина M поглинає множину T, якщо існує число $\lambda_0 > 0$ таке, що $T \subset \lambda M$ при всіх λ таких, що $|\lambda| \ge \lambda_0$. Множина M називається обмеженою, якщо вона поглинається всіма околами $V(\theta)$ нульового елемента [5, с. 69].

Відомо [3, с. 159], що в нормованих лінійних просторах обмеженість множини в означеному смислі співпадає з обмеженістю по нормі. Цей факт вказується в літературі, але доведень у доступних джерелах не наводиться. Тому доведемо цей принциповий результат.

Теорема 1. В нормованих лінійних просторах множина обмежена у розумінні топологічного лінійного простору (ТЛП) тоді і тільки тоді, коли вона обмежена по нормі.

Доведення. 1). Нехай множина M обмежена у розумінні ТЛП. Покажемо, що вона обмежена по нормі. Околи $V(\theta)$ достатньо розглядати як кулі $K(\theta,r) = \{x : \|x\| < r\}$. Якщо розглядати $\lambda V(\theta)$, то одержимо $\{x : x \in \lambda K(\theta,r)\}$. Це є $K(\theta,|\lambda| r)$. Якщо множина M не обмежена по нормі, то для $K(\theta,r)$ не вдасться знайти $\lambda_0 > 0 : |\lambda| \ge \lambda_0 \Rightarrow M \subset \lambda K(\theta,r)$, оскільки M має елементи з як завгодно великою нормою.

2). Нехай M обмежена по нормі. Тоді $\|x\| \le \alpha_0$ для всіх $x \in M$ і при достатньо великих $|\lambda|$ буде $M \subset \lambda K(\theta,r)$.

Теорему доведено.

Іншою, еквівалентною характеристикою обмеженості множини [5, с. 40] є така: $\forall (\lambda_n)_{n\in N} : \lambda_n \to 0 \wedge \forall (x_n)_{n\in N} : x_n \in M \Rightarrow \lambda_n x_n \to \theta$ в топології $\tau(X)$. Доведення еквівалентності обох підходів є у [5, с. 40, 41]. Дамо для нормованих лінійних просторів незалежне доведення для зв'язку збіжності і обмеженості по нормі.

Теорема 2. Нехай X – нормований лінійний простір, $M \subset X$. Множина M обмежена по нормі тоді і тільки тоді, коли виконана умова:

$$\forall(\lambda_n)_{n\in N}, \lambda_n \in R(C): \lambda_n \to 0 \wedge \forall(x_n)_{n\in N}: x_n \in M \Rightarrow \lambda_n x_n \to \theta .$$

Доведення. 1). Нехай множина M обмежена по нормі і дані дві вказані послідовності $(\lambda_n)_{n\in N}$, $(x_n)_{n\in N}$. Тоді $\exists \alpha_0 > 0 : \|x\| \le \alpha_0 \quad \forall x \in M$. Зокрема, $\|x_n\| \le \alpha_0 \ \forall n \in N$. Оскільки $\lambda_n \to 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): n > n_0 \Rightarrow |\lambda_n| < \dfrac{\varepsilon}{\alpha_0}$. Розглянемо послідовність $(\lambda_n x_n)_{n\in N}$. Нехай $n > n_0$. Тоді $\|\lambda_n x_n\| = |\lambda_n| \|x_n\| < \dfrac{\varepsilon}{\alpha_0} \cdot \alpha_0 = \varepsilon$. Отже, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): n > n_0 \Rightarrow \|\lambda_n x_n\| < \varepsilon$. Це і означає, що $\lambda_n x_n \to \theta$ в топології $\tau(X)$.

2). Нехай для множини M виконується вказана умова для послідовностей. Покажемо, що M обмежена по нормі. Відомо, що власно збіжна послідовність $(\lambda_n)_{n\in N}$ обмежена: $\exists l_0 > 0 : |\lambda_n| < l_0 \ \forall n \in N$. Аналогічно, послідовність $(\lambda_n x_n)_{n\in N}$ обмежена: $\exists \beta_0 > 0 : \|\lambda_n x_n\| < \beta_0 \ \forall n \in N$. Якщо б M була б не обмежена по нормі, то в M були б елементи з як завгодно великими нормами і умова $\|\lambda_n x_n\| < \beta_0$ не могла б виконуватись для всіх $x_n \in M$. Отже, M обмежена по нормі.

Теорему доведено.

Слід відзначити, що в метричних лінійних просторах цей результат уже не зберігається: обмеженість у розумінні ТЛП може не співпадати з обмеженістю по метриці. Наприклад, так є у просторі послідовностей $\Lambda = R^{\infty}$ (або C^{∞}) [3, с. 159]. Околи точок у цьому просторі $V(k_1, k_2, ..., k_n; \varepsilon)$ визначаються $k_1, k_2, ..., k_m \in N, \varepsilon > 0$ умовою: $|x_{k_i}| < \varepsilon,\ i = 1,2,...,m$. $x = (x_n)_{n\in N}$ – дана послідовність.

Таким чином, обмеженість множин у ТЛП може бути охарактеризована як у термінах околів, так і в термінах збіжності послідовностей в даній топології. Але далі природнім чином виникає питання: обмеженість множин характеризується збіжністю послідовностей, а, з іншого боку, відомо, що збіжність послідовностей не є адекватною топологічній структурі. Необхідні більш складні конструкції збіжності – фільтри або напрямленості [6, с. 97]. Будемо використовувати напрямленості.

Напрямленість – це узагальнення послідовностей. Послідовність $(x_n)_{n\in N}$ є відображення множини N натуральних чисел в деяку множину X. Множина N, як відомо, лінійно упорядкована. Нехай A - упорядкована (лінійно чи частково_ множина. Вона називається напрямленою, якщо $\forall \alpha, \beta \in A \exists \gamma \in A : \gamma \ge \alpha \wedge \gamma \ge \beta$. Функція $S : A \to X$ на напрямленій множині називається напрямленістю. Запис: $S = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Послідовність є частинним випадком напрямленості. Збіжність послідовностей у топологічних просторах визначається умовою:

$x_\alpha \to x_0 \Leftrightarrow \forall V(x_0) \exists \alpha_0 \in A : \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in V(x_0)$. $V(x_0)$ – довільний окіл точки x_0.

Виникає проблема: якщо в умові обмеженості множини в ТЛП замінити послідовності на напрямленості, то це буде те ж поняття чи інше. Отже, означимо таке поняття.

Означення. Множина $M \subset X$ в ТЛП називається посилено обмеженою, якщо для кожної напрямленості чисел $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ і для кожної напрямленості елементів $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in M$ виконується умова $\lambda_\alpha x_\alpha \to \theta$ в топології $\tau(X)$.

Виясними зв'язок обмеженості і посиленої обмеженості

Теорема 3. Множина $M \subset X$ в ТЛП є посилено обмеженою тоді і тільки тоді, коли вона обмежена.

Доведення. 1). Якщо M посилено обмежена, то вона обмежена, оскільки послідовність є частинним випадком напрямленості.

2). Нехай множина M обмежена. Покажемо, що вона посилено обмежена. Припустимо супротивне. Тоді існує напрямленість чисел $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$, збіжна до θ і напрямленість елементів $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ множини M, такі що напрямленість $(\lambda_\alpha x_\alpha)_{\alpha \in A}$ не збігається до θ в топології $\tau(X)$. Отже, знайдеться такий окіл $V_0(\theta)$ нульового елемента, що $\forall \alpha_0 \in A \exists \alpha' \in A : \alpha' \geq \alpha_0$, $\lambda_{\alpha'} x_{\alpha'} \in V_0(\theta)$. Позначимо $B = \{\alpha \in A : \lambda_\alpha x_\alpha \bar{\in} V_0(\theta)\}$. Покажемо, що B конфінальна в A. Порядок у множині B індукований порядком у множині A. B – напрямлена. Дійсно, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in B \exists \alpha_0 \in A : \alpha_3 \geq \alpha_1, \alpha_3 \geq \alpha_2$. Для $\alpha_3 \in A \exists \alpha_4 \in B : \alpha_4 \geq \alpha_3$ за властивістю околу $V_0(\theta)$. Тоді $\alpha_4 \geq \alpha_1$, $\alpha_4 \geq \alpha_2$ і множина B конфінальна в A. Це означає, що $(\lambda_{\alpha'})_{\alpha' \in B}$ є конфінальна піднапрямленість напрямленості $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$. Оскільки збіжність чисел задовольняє другу аксіому класу збіжності [2, с. 107], то $\lambda_{\alpha'} \to 0$. Виберемо її піднапрямленість $(\lambda_{\alpha'_n})_{n \in N}$, що є послідовністю. Вона збіжна до нуля по тій же причині. Розглянемо послідовність елементів $(x_{\alpha'_n})_{n \in N}$ множини M. За побудовою, $\lambda_{\alpha'_n} x_{\alpha'_n} \notin V_0(\theta)$. Це означає, що $\lambda_{\alpha'_n} x_{\alpha'_n} \overline{\to} \theta$. Отже, M необмежена. Протиріччя.

Теорему доведено.

Таким чином, узагальнена посилена обмеженість в ТЛП співпадає зі звичайною обмеженістю і використання напрямленостей не дає нового поняття, хоча послідовності не адекватні топології. Причиною цього явища, мабуть, є той факт, що збіжність чисел повністю характеризується послідовностями, а в умові обмеженості послідовність $(\lambda_n)_{n \in N}$ грає більш визначальну роль, ніж послідовність $(x_n)_{n \in N}$. Це дозволяє зробити висновок, що обмеженість тісно пов'язана з зчисленістю. Це проявляється і в критерії нормуємості ТЛП: ТЛП нормуємий тоді і тільки тоді коли він локально обмежений і локально опуклий, і в тому, що локально обмежені ТЛП повністю характеризуються p-однорідною нормою – узагальненням норми $\left(\|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\|, 0 < p < 1\right)$ [7]. Зв'язки різних аспектів ТЛП з зчисленістю являють значний інтерес, оскільки зчислені множини все ж таки, мабуть, найбільш вивчені серед нескінчених множин.

Список використаних джерел

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств / Б.З. Вулих. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 408 с.
2. Келли Дж. Л. Общая топология / Дж. Л. Келли. – М.: Наука, 1968. – 384 с.
3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
4. Крейн С.Г. и др. Функциональный анализ. СМБ / С.Г. Крейн и др. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
5. Робертсон А.П. Топологические векторные пространства / А.П. Робертсон, В.Дж. Робертсон. – М.: Мир, 1967. – 259 с.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
7. Zelasko W. Metric generalisations of Banach algebras // Rosprawy Matematycne, Warszawa, 47, 1965.

Анотація. **Погребний В.Д. Про обмеженість множин: різні аспекти**

Поняття обмеженості множини є одним з найважливіших математичних понять. В класичній математиці розглядаються обмежені множини на прямій, на евклідовій площині, у тривимірному евклідовому просторі. У сучасній математиці це поняття узагальнюється і вивчається у різних аспектах. Сучасна математика є наукою про структури. З точки зору цих основних структур, обмеженість можна розглядати в метричному, порядковому і тополого-алгебраїчному аспектах. В деяких просторах обмеженість з метричної точки зору співпадає з обмеженістю з тополого-алгебраїчної точки зору, а в деяких не співпадає. Ці проблеми розглядаються у даній роботі. Також аналізується поняття обмеженості множин в топологічних лінійних просторах. Це поняття може бути введене через збіжність послідовностей. В той же час, як відомо, структура топологічного лінійного простору не адекватна збіжності послідовностей. Природньо, виникає проблема: якщо ввести нове поняття обмеженості, використовуючи апарат збіжності напрямленостей, що адекватний структурі топологічного лінійного простору, то чи одержимо ми нове поняття обмеженості множини? Ця проблема аналізується і доведено, що одержуємо те ж саме поняття обмеженості. З'ясовується причина такого явища з точки зору різного значення послідовностей чисел і послідовностей елементів множини в топологічному лінійному просторі.

Ключові слова: *множина, обмеженість, простір, послідовність, напрямленість.*

***Summary.* Pogrebnoy V. About limitation of sets: various aspects**
The notion of limited sets is one of the most important mathematical concepts. In classical mathematics we consider bounded sets on the line, on Euclid's plane, in three-dimensional Euclidean space. In modern mathematics, this notion is generalized and studied in various aspects. Modern mathematics is a science of structures. From the point of view of these basic structures, the limitations can be considered in the metric, order and topology-algebraic aspects. In some limited spaces from a metric point of view coincides with the constraints on topology-algebraic point of view, and some do not match. These issues are discussed in this paper. It also analyzes the concept of limited sets in topological linear spaces. This concept may be introduced through the convergence sequences. At the same time, as we know, the structure of a topological linear space is not adequate for the convergence of sequences. Of course, there is a problem: if we introduce a new notion of boundedness, using the device for the convergence of nets, adequate to the structure of a topological linear space, we obtain a new notion of limited many? This problem is analysed and it is proved that we get the same concept of limited. It turns out the reason for this phenomenon from the point of view of different meanings of various number sequences and sequences of elements of a set in a topological linear space.

Key words: *set, limitation, space, sequence, net.*

Анжела Розуменко
доцент кафедри математики
angelarozumenko@mail.ru

КОНТРОЛЬНО-ОЦІНЮВАЛЬНІ ВМІННЯ ЯК СКЛАДОВА ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

На сучасному етапі розвитку суспільство стикається з цілим рядом значних викликів, вирішення яких безпосередньо впливає на те, якою буде наша країна в майбутньому. Однією з найактуальніших проблем сьогодення є професіоналізм фахівців у всіх сферах діяльності. Особливого значення при цьому набуває питання професійної підготовки майбутніх учителів взагалі, і вчителів математики зокрема. Саме з метою удосконалення системи освіти було розроблено концепцію компетентнісного підходу, яка сьогодні активно впроваджується в практику навчання.

Сучасна школа працює в умовах особистісно орієнтованого навчання, відповідно до якого головним у навчально-виховному процесі є учень. І це є абсолютно природнім. Теоретично обґрунтовано та підтверджено практикою, що педагогічно доцільний та методично грамотний контроль знань учнів дозволяє покращити якість засвоєння ними навчального матеріалу, забезпечити учням позитивну пізнавальну мотивацію та відповідальне ставлення до навчання. Отже, від уміння вчителя організовувати та проводити контроль знань учнів багато в чому залежить ефективність усього навчально-виховного процесу в школі. Тому питання формування в майбутніх учителів математики котрольно-оцінювальних умінь є актуальним.

Сучасний процес підготовки майбутнього фахівця відбувається в умовах компетентнісного підходу до навчання.

Основна ідея компетентнісного підходу до навчання полягає у тому, що головним результатом освіти мають стати не окремі знання, навички й уміння, а здатність і готовність людини до ефективної і продуктивної діяльності в різних соціально-значущих ситуаціях. У зв'язку з цим, у рамках компетентнісного підходу провідним є не стільки накопичення певного обсягу знань, скільки надбання різностороннього досвіду певної діяльності. Компетентнісний підхід передбачає об'єднання в єдине ціле освітнього процесу і його осмислення, у ході якого відбувається становлення особистісної позиції студента, його ставлення до предмета своєї діяльності.

Педагогіка, зокрема й професійна освіта, активно оперують поняттями «компетентність» і «компетенція», але не існує єдності в розумінні їх сутності.

Компетенції вчителя – це коло його повноважень і відповідальність у сфері педагогічної діяльності, здійснення якої забезпечується рівнем компетентності.

Професійні компетентності вчителя утворені:

- комплексом його педагогічних здібностей і можливостей;
- наявністю вмотивованої спрямованості на навчально-виховний процес;
- системою необхідних знань, навичок, умінь і досвіду, які постійно вдосконалюються і реалізуються на практиці.

Ми погоджуємося із позицією доктора педагогічних наук С.Скворцової [3], яка методичну компетентність вчителя математики розглядає як теоретичну і практичну готовність до проведення занять з математики за різними навчальними комплектами, що виявляється у сформованості системи дидактико-методичних знань і умінь з окремих розділів та тем курсу, окремих етапів навчання й досвіду їх застосування (дидактико-методичних компетенцій), спроможність ефективно розв’язувати стандартні та проблемні методичні задачі.

С.Скворцова виділяє аналітичні, прогностичні та проектні вміння, що складають зміст теоретичної готовності до навчання учнів математики і базуються на знаннях:

1) цілей і завдань навчання математики;
2) особливостей побудови курсу математики;
3) нормативних документів;
4) способу побудови календарного планування;
5) вимог до математичної підготовки учнів;
6) критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів;
7) основних засобів, методів і форм організації навчального процесу;
8) можливих структур уроку математики;
9) методичних систем, що реалізовані у чинних підручниках; відмінностей цих методичних систем;
10) передового педагогічного досвіду вчителів-практиків з проблем організації сучасного уроку математики та вивчення окремих його тем;
11) загальних особливостей використання сучасних навчальних технологій під час навчання математики;
12) порядку вивчення окремих тем курсу математики;
13) результатів опанування цими темами;
14) традиційної методики вивчення окремих тем;
15) інноваційних підходів їх опанування.

Під практичною готовністю майбутнього педагога до проведення уроків математики науковець розуміє набуття ним досвіду застосування складових теоретичної готовності на практиці:

1) через імітацію майбутньої педагогічної діяльності під час рольових ігор;
2) через проектну діяльність з розв'язування методичних проблем;
3) під час педагогічної практики.

Погоджуємося з висновком про те, що для набуття студентами досвіду майбутньої професійної діяльності вже в аудиторних умовах необхідно і можливо створювати ситуації, які вимагають аналізу діяльності вчителя та учня на окремих етапах уроку, імітації реального уроку або його фрагменту.

Предметом нашого дослідження є формування в майбутніх учителів математики контрольно – оцінювальних умінь, які ми розглядаємо як складову методичної компетентності вчителя математики.

Під контрольно-оцінювальними вміннями розуміємо уміння:

1) методично обґрунтовувати та реалізовувати контроль знань учнів у різних формах, на різних етапах засвоєння знань, проводити перевірку та оцінювання знань учнів за окремі види роботи та з окремих тем курсу;
2) здійснювати моніторинг знань учнів (на рівні учня, класу, школи).

Аналіз літератури з проблеми підготовки майбутніх вчителів математики до проведення контролю навчальних досягнень учнів показав, що методисти пропонують такий орієнтовний алгоритм дій учителя математики [4]:

– передбачення місця і виду контролю під час календарно-тематичного планування (вхідний, поточний, періодичний, підсумковий та інші);

– виділення рівня засвоєння кожного елементу знань (знання, розуміння; застосування знань до розв’язування практичних завдань);

– виділення рівня сформованості кожного вміння (виконання діяльності: за зразком під керівництвом вчителя, за зразком самостійно, перенесення вмінь на відоме завдання, перенесення вмінь на незнайоме завдання);

– визначення форм контролю, які будуть застосовані на конкретному уроці (усне опитування, математичний диктант, тестування, контрольна робота, самостійна робота тощо);

– підбір або розробка діагностичних завдань для перевірки навчальних досягнень учнів;

– продумування процедури оцінювання навчальних досягнень учнів.

Зміст даного орієнтовного алгоритму можна розглядати як методичні знання, якими необхідно володіти кожному майбутньому вчителю математики.

Виділяють чотири взаємопов'язані характеристики контрольно-оцінювальної діяльності майбутнього вчителя математики:

1) мотиваційно-ціннісна характеристика - враховує індивідуальні потреби, інтереси і схильності, створює високу особисту зацікавленість у підвищенні власної кваліфікації педагогів;

2) змістовна характеристика - являє собою сукупність способів і прийомів здійснення контрольно-оцінювальної діяльності, а також професійно-значущі цінності, які вказують саме на особистісну цінність, значимість або вбудовування їх у власну ієрархію цінностей;

3) комунікативна характеристика - включає вміння ясно і чітко викладати думки, переконувати, аргументувати, будувати доведення, аналізувати, висловлювати судження, передавати раціональну та емоційну інформацію, встановлювати міжособистісні зв'язки, узгоджувати свої дії з діями колег, вибирати оптимальний стиль спілкування в різних ділових ситуаціях, організовувати і підтримувати діалог;

4) рефлексивно-оцінна характеристика - дозволяє досягти адекватної професійно-особистісної самооцінки, прогнозувати і аналізувати результати своєї контрольно-оцінювальної діяльності, підвищує рівень самоорганізації.

Виділені характеристики можуть бути орієнтирами для визначення шляхів формування контрольно-оцінювальних умінь майбутніх учителів математики.

Формування контрольно-оцінювальних умінь майбутнього вчителя математики – одне із завдань курсу «Методика навчання математики», який спрямований на підготовку майбутніх фахівців до викладання математики в загальноосвітніх навчальних закладах.

Реалізація компетентнісного підходу заснована на широкому використанні в навчальному процесі активних та інтерактивних форм проведення занять, а також впровадження освітніх інновацій у навчально-виховний процес вузу.

В умовах сучасних форм навчання з метою формування контрольно-оцінювальних умінь студентів використовують такі методи:

1) педагогічні ігри (імітація поведінки в конкретній ситуації), які сприяють наближенню майбутнього вчителя до професійної обстановки, що відтворює при цьому професійні ситуації, дії і відносини. Під педагогічною грою ми розглядаємо метод вивчення, освоєння та апробації певних моделей рішень і відповідних дій в імітаційній ситуації у вигляді рольової або комунікативно-діяльнісної взаємодії. Педагогічні ігри дозволяють студентам отримувати цілісний досвід організації оціночної діяльності і сприяють розвитку певних професійно-значущих особистісних якостей;

2) відвідувати уроки з математики у школі з їх подальшим аналізом. На даних заняттях використовується схема аналізу уроку «Спостереження і вивчення контрольно-оціночної діяльності вчителя», заповнення якої сприяє формуванню виробленню у студентів уміння аналізувати контрольно-оцінювальну діяльність вчителя, дотримуючись при цьому певної послідовності здійснення оцінювальних дій, що дозволяє студентам навчитися виокремлювати компоненти оцінювальної діяльності вчителя математики і розвивати їх у себе;

3) ефективне формування навчальних умінь у студентів можливо тільки за умови цілеспрямованого керівництва цим процесом. У процесі формування контрольно-оцінювальних умінь обов'язковою є постановка пізнавальних завдань, що вимагають застосування даного вміння. Використання схем, моделей, алгоритмів робить завдання більш здійсненним. Завдання повинні ускладнюватися поступово, забезпечуючи перехід від спільної діяльності учнів і педагога за зразком до більш самостійної діяльності [1].

Формування контрольно-оцінювальних умінь ефективно відбувається в ході педагогічної практики, тобто в практичній діяльності, що має розгорнуту структуру і надає можливість наочно уявити залежність її результату від оволодіння умінням.

Вдосконалення методичної освіченості майбутнього вчителя має починатися з перших днів його навчання у вузі. Питання контрольно-оцінювальної діяльності можна вважати важливим видом діяльності вчителя, включаючи в неї усвідомлення і прийняття широких і вузьких цілей навчання, виховання і розвиток учнів, особливо в умовах особистісно орієнтованої системи освіти.

Формування контрольно-оцінювальних умінь майбутніх учителів математики відбувається в процесі вивчення курсів «Методика навчання математики» та «Вибрані питання методики навчання математики».

Тема «Контроль та оцінювання знань учнів» є обов'язковою для вивчення у загальному розділі методики навчання математики.

Ми пропонуємо спеціальні завдання професійного спрямування, які сприяють формуванню контрольно-оцінювальних умінь майбутніх учителів математики.

Завдання з теми «Контроль та оцінювання знань учнів» можуть бути такими [2]:

1. Аналіз запропонованої теми шкільного курсу математики (основний зміст, вимоги щодо засвоєння знань учнями, кількість годин на вивчення).
2. Аналіз різних форм контролю знань учнів (самостійні роботи, контрольні роботи) за навчальним планом та їх орієнтованого змісту (за дидактичними матеріалами та готовими методичними розробками).
3. Для одного з основних понять теми виділити його суттєві ознаки. Запропонувати тести відкритої форми, які дозволять перевірити засвоєння учнями суттєвих ознак поняття.
4. За одним із діючих підручників опрацювати дану тему та встановити взаємозв'язки між поняттями даної теми. Запропонувати завдання з пропусками, які дозволять перевірити усвідомлення учнями системи понять даної теми.
5. В середовищі однієї з програми реалізувати 10 тестових завдань різного типу.
6. Зробити аналіз завдань ЗНО щодо запропонованої теми.
7. Обґрунтувати спосіб оцінювання запропонованих завдань.

Запропоновані завдання можуть бути використані як на практичному занятті з відповідної теми, так і для індивідуальної або групової роботи, що студенти мають виконати самостійно в позанавчальний час. На нашу думку доцільно студентів об'єднати в творчі групи і запропонувати кожній групі певне завдання з колективним обговоренням його виконання. Дані теми можуть бути темою інтегрального заняття-семінару, що дозволить реалізувати міжпредметні зв'язки курсів педагогіки, психології та методики навчання математики.

Список використаних джерел

1. Далингер В. А. Критерии и уровни сформированности контрольно-оценочных умений студентов педвузов в учебной деятельности [Текст] / В. А. Далингер // Международный журнал экспериментального образования: материалы междунар. науч. конф. «Фундаментальные и прикладные исследования. Образование, экономика, право», 2012. - № 8. - С. 109-113.

2. Розуменко А.О. Формування контрольно-оцінювальних умінь у процесі підготовки майбутнього вчителя математики/ А. О. Розуменко, А. В. Заточна// Актуальні питання природничо-математичної освіти: зб. наук. пр./Сум. держ. пед. ун-т ім. А.С.Макаренка, 2015.– №5-6. – С. 96-101.
3. Скворцова С.О. Формування професійної компетентності в майбутнього вчителя математики [Електронний ресурс] / С.О. Скворцова // Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку, 2010.– №4. – Режим доступу:http://www.intellect-invest.org.ua/ukr/pedagog_editions_emagazine _ pedagogical_science_vypuski_n4_2010_st_4/
4. Фролов Ю.В. Компетентностная модель как оценка качества подготовки специалистов / Ю.В. Фролов, Д.А. Махотин // Высшее образование, 2004. - №8. - С.34-41.

Анотація. Розуменко А.О. Контрольно-оцінювальні вміння як складова професійної компетентності майбутнього вчителя математики. *У статті розглянуто проблему формування професійної компетентності майбутнього вчителя математики. Розкрито зміст поняття «контрольно - оцінювальні вміння». Запропоновано систему завдань, які можуть бути запропоновані студентам при вивченні теми «Контроль та оцінювання знань учнів».*

Ключові слова: *контроль, оцінювання, компетентність.*

Abstract. Rozumenko A. Control and estimates skills as part of the professional competence of future teachers of mathematics. *In the article the problem of formation of professional competence of future teachers of mathematics. The content of the concept of "control - estimates ability." The system of tasks that can be offered to students in the study of the topic "Monitoring and evaluation of students' knowledge*."

Keywords: *monitoring, assessment, competence*.

Алла Салтикова
доцент кафедри фізики та методики навчання фізики
alla_1965@list.ru
Юрій Шкурдода
доцент кафедри фізики та методики навчання фізики
shkurdoda@rambler.ru

ПРОЕКТНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Показником якісної вищої освіта є не тільки знання , навички та уміння, а й сформована творча особистість фахівця, здатного до саморозвитку, самоосвіти, інноваційної діяльності. Вирішення цього завдання навряд чи можливо тільки шляхом передачі знань в готовому вигляді від викладача до студента. Необхідно перевести студента з пасивного споживача знань в активного їх творця, що вміє сформулювати проблему, проаналізувати шляхи її вирішення, знайти оптимальний результат і довести його правильність. Тому особливу увагу зараз приділяють самостійній роботі студентів. На неї відводиться до 2/3 навчального часу. У зв'язку з цим, слід визнати, що самостійна робота студентів є не просто важливою формою освітнього процесу, а повинна стати його основою. Це передбачає орієнтацію на активні методи оволодіння знаннями, розвиток творчих здібностей студентів, перехід від поточного до індивідуалізованого навчання з урахуванням потреб і можливостей особистості. Посилення ролі самостійної роботи студентів означає принциповий перегляд організації навчального процесу у ВНЗ, який повинен будуватися так, щоб розвивати вміння вчитися, формувати у студента здатність до саморозвитку, творчого застосування отриманих знань, адаптації до професійної діяльності в сучасному світі.

Навчальні проекти є ефективним засобом формування предметної й ключових компетентностей студентів. В основу проектних технологій покладена ідея, що становить суть поняття "проект", його прагматична спрямованість на результат, який можна отримати при вирішенні тієї чи іншої практично або теоретично важливої проблеми. Цей результат можна побачити, осмислити, застосувати в реальній практичній діяльності.

Основними вимогами до використання проектів є:

1. Наявність значущої в дослідницькому, творчому плані, проблеми або завдання, що вимагає інтегрованого знання, дослідницького пошуку для її вирішення.

2. Практична, теоретична, пізнавальна значущість передбачуваних результатів.

3. Самостійна (індивідуальна, парна, групова) діяльність студентів.

4. Структуризація змістової частини проекту (з вказівкою поетапних результатів).

5. Використання дослідницьких методів, що передбачають певну послідовність дій: визначення проблеми і завдань дослідження; висунення гіпотез їх вирішення; обговорення методів дослідження ; обговорення способів оформлення кінцевих результатів захисту).

6. Збір, систематизація і аналіз отриманих даних.

7. Підбиття підсумків, оформлення результатів, їх презентація.

8. Висновки, висунення нових проблем дослідження.

Мета використання проектів полягає у формуванні навичок ефективного використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні студентів за допомогою інноваційних педагогічних технологій, якими передбачається самостійна (індивідуальна чи групова) дослідницько-пошукова діяльність.

Загальну схему технології проектного навчання можна зобразити у вигляді таблиці:

№	*Етапи діяльності*	*Зміст діяльності*
1.	Підготовка. Визначення теми і мети проекту.	Студенти: обговорення, пошук інформації. Викладач: заява задуму, мотивація, допомога у постановці завдань.
2.	Планування: а) визначення джерел, засобів збору, методів аналізу інформації, засобів представлення результатів; б) установлення критеріїв оцінки результату і процесу.	Студенти:формулюють завдання і виробляють план дій. Викладач: коректує, пропонує ідеї, висуває пропозиції.
3.	Збір інформації (спостереження, робота з літературою, анкетування, експеримент).	Студенти:збирають інформацію. Викладач: спостерігає, непрямо керує діяльністю.
4.	Аналіз. Аналіз інформації, формулювання висновків.	Студенти:аналізують інформацію. Викладач: коректує, спостерігає, радить
5.	Подання й оцінка результатів (усний, письмовий звіт та оцінка результатів і процесу дослідження за вчасно встановленими критеріями).	Студенти:аналізують інформацію, Викладач: коректує, спостерігає, радить. Викладач і студенти беруть участь у колективному обговоренні, оцінюють зусилля, використані можливості, творчий підхід.

Тематика проектів може бути дуже різною . Це можуть бути проекти як з певних предметів, так і міждисциплінарні. Курсові і кваліфікаційні роботи теж можна розглядати як навчальні проекти. Основним результатом виконаних проектів є вирішення поставленої проблеми , якщо це теоретична задача - то її конкретне розв`язання, якщо це практична - то конкретний результат готовий до впровадження у лабораторії, на практичному занятті, в реальному житті.

Проектна діяльність сприяє розвитку пізнавальних навиків студентів, умінь самостійно конструювати свої знання, орієнтуватися в інформаційному просторі,спонукає до критичного і творчого мислення.

Анотація. Салтикова А.І. Шкурдода Ю.О. Проектні технології в організації самостійної роботи студентів. *У статті розглянуто використання проектних технологій для організації самостійної роботи студентів, сформульовані основні дидактичні вимоги до проектів. Проведений аналіз тематики проектів та зроблений висновок, що проектна діяльність сприяє розвитку пізнавальних навиків студентів, умінь самостійно конструювати свої знання, орієнтуватися в інформаційному просторі ,спонукає до критичного і творчого мислення.*

Ключові слова: *проектні технології, самостійна робота,предметна та ключова компетентності.*

Abstract. Saltykova A.I. Shkurdoda Y.O . Project technology in the organization independent work of students. The article describes the use of project technologies for the organization independent work of students, formulated the basic didactic requirements for projects.The analysis of the projects and concluded that the project activity contributes to the development of cognitive skills of students, abilities to independently design their knowledge, to navigate in the information space, motivates critical and creative thinking.

Keywords: *design technology, independent work, subject and key competencies.*

Стадник О.Д.,
доцент кафедри фізики та методики навчання фізики
astadnick@rambler.ru
Трохимець Д.М.,
лаборант кафедри фізики та методики навчання фізики
diesel.2000@mail.ru

СТРАТЕГІЧНІ ПРІОРИТЕТИ ВИВЧЕННЯ НАНОФІЗИКИ ТА НАНОТЕХНОЛОГІЙ, ЯК ФАКТОРА ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ

Одним з пріоритетних напрямків роботи сучасної школи є залучення учнів до інноваційних проектів, до яких відноситься впровадження нанотехнологій - сукупності технологічних методів і прийомів роботи з наномасштабних об'єктами.

Поставлено завдання - організаційними, науково-методичними та інформаційними заходами сприяти становленню регіонального нанотехнологічного центру, внести вклад в підвищення конкурентоспроможності продукції наукомістких підприємств регіону.

За прогнозами фахівців, завдяки таким проектам:

• в наноенергетиці будуть створені нові типи двигунів і паливних елементів;

• в новій економіці буде розвиватися нанотехнологічний бізнес;

• в новій системі освіти ключові завдання будуть націлені на розвиток нанопромисловості.

Все це відбудеться за умови підвищення рівня людського капіталу кожного викладача, факультету, регіону, держави. При цьому, якість викладання фізики, нанофізики, є основою науково-технічного прогресу кожного регіону, нанотехнических розвитку цивілізації. Відзначимо, що індивідуальний людський капітал випускників педуніверситету і викладачів - це накопичений ними певний запас здоров'я, знань, навичок, здібностей, творчих мотивацій і культурних традицій, створені навчальні та наукові лабораторії, розроблені дослідні проекти та навчальні посібники, які використовуються в процесі управління знаннями учнів .

Опора нанотехнологій на нанофізику дозволить керувати комплексом фізичних властивостей нових матеріалів:

• Механічні: збільшення твердості і пластичності, межі текучості.

• Електричні: розмірна залежність роботи виходу електронів і електроопору.

• Магнітні: суперпарамагнетизм, максимальна коерцитивна сила в монодоменних частинках, гігантський магнітоопір.

• Термічні: зменшення температур Дебая, плавлення, фазових переходів.

• Оптичні: зміна електромагнітних спектрів випромінювання і поглинання, збільшене розсіювання.

В Україні, сумському регіоні, СумДПУ імені А.С. Макаренка є всі передумови для знаходження своєї ніші в нанонауці і активного впровадження нанотехнологій у всіх сферах економічної діяльності, а отже, існує необхідність розробки методик і дидактичних засобів навчання в цій міждисциплінарної галузі.

У СумДПУ імені А.С. Макаренка складено програму вивчення нанотехнологій на середньострокову перспективу, викладається спецкурс з нанотехнологій, підібрані методи і прилади для дослідження. В рамках програми СумДПУ передбачається: досягти фундаментального розуміння студентами фізико-математичного факультету суті матерії, що дозволяє забезпечити контроль і маніпулювання атомами і об'єктами в межах нанометрової шкали; надавати гранти окремим студентам; забезпечити формування регіональної навчальної нанотехнологічної мережі, розвиток регіональної ніші Сумщини в області нанотехнологій, підвищити інформованість і конкурентоспроможність наукомістких виробництв, забезпечити ефективне навчання та підготовку вчених, магістрів.

Відомо, що не всі основні методи досліджень - електронний мікроскоп, атомно-силовий мікроскоп, тунельний мікроскоп, нанотермометр, нановаги, наноіндентер і т.п., які можуть стати в нагоді для подальшого розвитку нанотехнологій, є в кожному вузі. Перспектива вивчення і впровадження нанотехнологій, не дивлячись на це, є, в першу чергу в об'єднанні вузівської, галузевої і академічної науки, міжнародне наукове співробітництво. Вузівська регіональна нанолабораторія, на прикладі СумДПУ, може складатися з декількох модулів.

1. Модуль отримання нанорозмірних структур. Модуль дозволяє отримувати нанорозмірні частинки і покриття електричним вибухом провідників, а також визначити наявність наночастинок металів за допомогою спектрофотометра.

2. Модуль отримання нанокомпозитних матеріалів, до складу якого входять: установка ВУП - 5М призначена для отримання наночастинок шляхом відпалу прекурсорів металів в вакуумі. Ультразвуковий диспергатор, призначений для рівномірного розподілу наночастинок в полімерній матриці. Гідравлічний прес, що дозволяє отримувати зразки нанокомпозитних матеріалів необхідної форми

3. Модуль для отримання одношарових і багатошарових наноструктур. Установка для отримання одношарових нанокомпозитів, що дає можливість отримувати шари полімеру або нанокомпозитного матеріалу товщиною 20-100 нм.

4. Аналітичний модуль для виконання структурних досліджень нанозразків і вивчення фізичних властивостей. Модуль на базі електронного мікроскопа, що дозволяє досліджувати рельєф поверхонь зразків з високою роздільною здатністю. За допомогою установки ДРОН-2.0 можна досліджувати структуру і фазовий склад. Установка для вимірювання електричних властивостей, призначена для вимірювання електропровідності, тангенса кута діелектричних втрат і діелектричної проникності нанокомпозитних матеріалів, нанопокриттів. Установка для вимірювання гальваномагнітних характеристики, включаючи дослідження магнетосопротивления в магнітних полях до 2 Тл в широкому температурному інтервалі. Прилад для дослідження мікротвердості, що дозволяє досліджувати наноматеріали та нанопокриття.

5. Модуль комп'ютерного моделювання нанооб'єктів. Може бути представлений лабораторією комп'ютерного моделювання.

6. Модуль розробки методик і посібників з вивчення наноматеріалів і нанотехнологій в школах і вузах, перепідготовки викладацьких кадрів, зв'язки з навчальними та наукомісткими промисловими підприємствами регіону.

Важливо розуміти, чому вчити, як вчити, які дидактичні засоби використовувати, який зміст людського капіталу випускників технічних і фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів має бути в сучасному глобальному світі.

Включення нанотехнологій в навчальний план з фізики, хімії, біології, інформатики сприятиме реалізації нанотехнологічної програми регіону, побудови регіональної нанотехнолгіческой мережі.

Приклади можливих учасників регіональної нанотехнологічної мережі і можливі напрямки діяльності їх представлені нижче.

СумДПУ - методики, навчальні посібники для шкіл і вузів, готівкова матеріальна база, координація діяльності учасників мережі.

СДУ - прикладна наноінженерії, енергетика.

СНАУ - нанобіології, інформаційне нанотехнологічної забезпечення аграрної галузі.

Висновки.

1. Підвищення конкурентоспроможності фахівців і, як результат, продукції наукомістких підприємств регіону можливо на основі розробки і реалізації Програми розвитку наноіндустрії спільно з підприємствами, вузівської, галузевої і академічною наукою. Це забезпечить не тільки високі показники в наукометричних базах, а й перспективи для держави - перехід до нового технологічного укладу, що забезпечує зростання ВВП, комплексну безпеку і якість життя.

2. Фінансування виконання Програми могло б реалізуватися на принципах державно-приватного партнерства, а також з залученням міжнародних грантів.

3. На першому етапі зацікавленим учасникам слід підготувати проект заявки на фінансування - «Регіональний нанотехнологічний центр для навчального, інформаційного, виробничого підвищення конкурентоспроможності продукції та послуг».

Анотація. Стадник О.Д., Трохимець Д.М. Стратегічні пріоритети вивчення нанофізики та нанотехнологій, як фактора економічного розвитку. Розглянуто роль фізики в розвитку нанотехнологій для потреб наукоємних підприємств. Запропоновано комплекс заходів по забезпеченню розвитку нанотехнологій в Сумському регіоні

Ключові слова. Нанотехнології, роль фізики, конкурентоспроможність фахівців та продукції.

Страх О. П.,
викладач кафедри математики

НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Одне з центральних та приципово важливих місць у якісній теорії диференціальних рівнянь займають крайові задачі для різного класу функціонально-диференціальних систем., а у випадку дисипативних систем з дискретним часом – крайові задачі для фунціонально різницевих систем [1–3]. У дослідженні крайових задач для таких систем вже традиційно використовується побудований апарат нетерових операторів [4].

Розглянемо наступну функціонально-різницеву систему

$$\Delta x(t) - \Phi(t)\sum_{s=a}^{b} A(s)x(s) = f(t), \tag{1}$$

де $\Phi(t)$ — $(n\times m)$-вимірна, $f(t)$ — $(n\times 1)$-вимірна, $A(t)$ — $(m\times n)$-вимірна матриці, елементи яких належать простору $l_1[a,b]$, $\left(b-a\right)\in\square$, $\operatorname{rank}\Phi(t) = m$, $t\in[a,b]$, $x(t)\in l_1[a,b+1]$, $l_1[a,b] = \left\{ f(t) \left| \sum_{s=a}^{b} \left| f(s)\right| < \infty \right.\right\}$ — банаховий простір сумовних на відрізку $[a,b]$ функцій [5] з нормою $\| f \| = \sum_{s=a}^{b}\left| f(s)\right|$.

Знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності системи (1). Запишемо:

$$\Delta x(t) = f(t) + \Phi(t)c_0, \qquad c_0 = \sum_{s=a}^{b} A(s)x(s) \in \mathrm{R}^m,$$

тоді з урахуванням властивостей різницевого оператора Δ [3, 6] отримуємо:

$$x = \tilde{f}(t) + \Psi(t)c_0 + \tilde{c} = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)c, \tag{2}$$

де $\tilde{f}(t) = \sum_{s=a}^{t-1} f(s)$, $\Psi(t) = \sum_{s=a}^{t-1}\Phi(s)$, $\tilde{c} = col(c_{m+1},\ldots,c_{m+n}) \in \mathrm{R}^n$, $\Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n]$ — $(n\times(m+n))$-вимірна матриця, $c = col(c_0,\tilde{c}) \in \mathrm{R}^{m+n}$. Підставивши (2) в систему (1), отримуємо:

$$f(t) + [\Phi(t), 0_n]c - \Phi(t)\sum_{s=a}^{b} A(s)\tilde{f}(s) - \Phi(t)\sum_{s=a}^{b} A(s)[\Psi(s), I_n]\cdot c = f(t),$$

$$\left[I_m - \sum_{s=a}^{b} A(s)\Psi(s), -\sum_{s=a}^{b} A(s) \right] c = \sum_{s=a}^{b} A(s)\,\tilde{f}(s).$$

Таким чином, маємо алгебраїчну систему для визначення вектора c:

$$Dc = \tilde{b}, \tag{3}$$

де $D = \left[I_m - \sum_{s=a}^{b} A(s)\Psi(s), -\sum_{s=a}^{b} A(s) \right]$ — $(m \times (m+n))$-вимірна матриця, $\tilde{b} = \sum_{s=a}^{b} A(s)\,\tilde{f}(s)$ — $(m \times 1)$-вимірна матриця.

Проводячи міркування, аналогічні випадку систем інтегро-динамічних рівнянь на часовій шкалі [7] із застосуванням методу псевдо-обернених матриць Мура–Пенроуза [4], знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності отриманої системи (3). Нехай $n_1 := \operatorname{rank} D$. Знаходимо $((m+n)\times(m+n))$-вимірну матрицю $P_D := I_{m+n} - D^+ D$, що є ортопроектором $P_D : \mathrm{R}^{m+n} \to N(D)$, та $(m \times m)$-вимірну матрицю $P_{D^*} := I_m - DD^+$, що є ортопроектором $P_D : \mathrm{R}^m \to N(D^*)$, де D^* — транспонована до D матриця, а D^+ — єдина $((m+n)\times m)$-вимірна псевдо-обернена за Муром-Пенроузом до D матриця. Тоді, згідно з теорією [4, 7], алгебраїчна система (3) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли її права частина належить ортогональному доповненню $(\ker D^*)^{\perp} = \mathrm{I}m(D)$. Це означає, що для вектор-константи $\tilde{b}$ має виконуватись умова

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \tag{4}$$

де $P_{D^*_{d_1}}$ — $(d_1 \times n)$-вимірна матриця, що складається з $d_1 := m - n_1$ лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{D^*}. При виконанні d_1 лінійно незалежних умов (4) система (3) має r_1-параметричну ($r_1 = m + n - n_1$) сім'ю розв'язків вигляду:

$$c = P_{D_{r_1}} c_{r_1} + D^+ \tilde{b}, \quad c_{r_1} \in \mathrm{R}^{r_1}, \tag{5}$$

де $P_{D_{r_1}}$ — $((m+n)\times r_1)$-вимірна матриця, що складається з r_1 лінійно незалежних стовпців матриці-проектора P_D.

Підставляючи отриманий вираз для константи $c \in \mathrm{R}^{m+n}$ у розв'язок (2), отримуємо загальний розв'язок функціонально-різницевої системи (1). Таким чином, доведене наступне твердження.

Теорема 1.1 *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1$. *Відповідна однорідна функціонально-різницева система для системи* (1) ($f = 0$) *має* r_1*-параметричну* ($r_1 = m + n - n_1$) *сім'ю розв'язків*

$$x(t,c_{r_1}) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}c_{r_1}, \quad c_{r_1} \in \mathrm{R}^{r_1}.$$

Неоднорідна функціонально-різницева система (1) *є розв'язною тоді й тільки тоді, коли функція* $f(t) \in l_1[a,b]$ *задовольняє* $d_1 = m - n_1$ *лінійно незалежні умови* (4). *При виконанні цих умов система* (1) *має* r_1*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x(t,c_{r_1}) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}c_{r_1} + F(t), \tag{6}$$

де $x(t) \in l_1[a,b+1]$, $F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}$.

Тепер розглянемо питання про розв'язність та структуру множини розв'язків крайової задачі, що складається з функціонально-різницевої системи (1) та крайових умов,

$$\Delta x(t) - \Phi(t)\sum_{s=a}^{b}A(s)x(s) = f(t), \quad \ell x = \alpha \tag{7}$$

де ℓ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений у просторі $D_2^n([a,b)_{\mathrm{T}})$, $\alpha = col(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in \mathrm{R}^p$. Нехай умова розв'язності (4) для системи (1) виконується, тобто $P_{D_{d_1}^*}\tilde{b} = 0$. Тоді для того, щоб розв'язок (6) системи (1) був розв'язком крайової задачі (7), необхідно щоб він задовольняв крайові умови $\ell x = \alpha \in \mathrm{R}^p$. Підставимо розв'язок (6) в задані крайові умови:

$$\ell x \equiv \ell(F(\cdot)) + \ell(\Psi_0(\cdot)P_{D_{r_1}}c_{r_1}) = \alpha, \tag{8}$$

і для визначення вектора c_{r_1} отримуємо наступну алгебраїчну систему:

$$Qc_{r_1} = \alpha - \ell(F(\cdot)), \tag{9}$$

де $Q = \ell(\Psi_0(\cdot))P_{D_{r_1}}$ — $(p \times r_1)$-вимірна матриця. Нехай $m_1 := \mathrm{r}ankQ$. Тоді $m_1 \le \min\{p, r_1\}$. Визначаємо $(r_1 \times r_1)$-вимірну матрицю $P_Q := I_{r_1} - Q^+Q$, що є ортопроектором $P_Q : \mathrm{R}^{r_1} \to N(Q)$, та $(p \times p)$-вимірну матрицю $P_{Q^*} := I_p - QQ^+$, що є ортопроектором $P_Q : \mathrm{R}^p \to N(Q^*)$, де Q^* — транспонована до Q матриця, а Q^+ — єдина $(r_1 \times p)$-вимірна псевдо-обернена за Муром–Пенроузом до Q матриця. Використовуючи аналогічні результати [7], алгебраїчна система (9) є розв'язною, якщо її права частина $\alpha - \ell(F(\cdot))$ належить ортогональному доповненню $(\ker Q^*)^\perp = \mathrm{I}m(Q)$. Це означає, що має виконуватись умова

$$P_{Q_d^*}(\alpha - \ell(F(\cdot))) = 0, \tag{10}$$

де $P_{Q_d^*}$ — $(d \times p)$-вимірна матриця, що складається з $d = p - m_1$ лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{Q^*}. При виконанні d лінійно-незалежних умов (10) система (9) має r-параметричну ($r = m + n - n_1 - m_1$) сім'ю розв'язків вигляду:

$$c_{r_1} = P_{Q_r} c_r + Q^+(\alpha - \ell(F(\cdot))), \quad c_r \in \mathrm{R}^r, \tag{11}$$

де P_{Q_r} — $(r_1 \times r)$-вимірна матриця, що складається з r лінійно незалежних стовпців матриці-проектора P_Q. Підставляючи отриманий вираз (11) для константи c_{r_1} у розв'язок (6) системи (1), отримуємо загальний розв'язок крайової задачі (7). Таким чином, ми отримали наступний результат.

Теорема 2.2 *Нехай для крайової задачі* (3.9) $\mathrm{rank}Q = m_1 \le \{p, r_1\}$. *Тоді відповідна однорідна крайова задача* ($f = 0$, $\alpha = 0$) *має* $r = r_1 - m_1$ *і тільки* r *лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$x = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathrm{R}^r.$$

Неоднорідна крайова задача (7) *є розв'язною тоді й тільки тоді, коли* $f(t) \in l_1[a,b]$ *та* $\alpha \in \mathrm{R}^p$ *задовольняють* d_1 *лінійно незалежні умови* (4) *та* $d = p - m_1$ *лінійно незалежні умови* (10). *При виконанні цих умов крайова задача* (7) *має* r*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+(\alpha - \ell(F(\cdot))) + F(t).$$

Література

1. Азбелев Н. В., Максимов Н. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1991. — 277с.

2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421с.

3. Kelley W. G., Peterson A. C. Difference equation. An introduction with applications. — N.-Y., Boston, London, Toronto, Sydney, Tokio: Harcount Acad. Press., 2001. — 404p.

4. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — VSP, Utrecht–Boston, 2004. — 317p.

5. Треногин В.А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 495с.

6. Birkhoff G. D. General theory of linear difference equations. Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — XII, № 2. — P. 243–284.

7. Boichuk O. A., Strakh O. P. Fredholm Boundary-value Problems for Systems of Linear Integrodynamical Equations with Degenerate Kernel on a Time Scale – Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2015, Vol. 205, Issue 6, pp 749–756.

Анотація. Використовуючи теорію псевдо обернених за Муром–Пенроузом матриць та теорію різницевих систем, встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків одного класу систем лінійних функціонально-різницевих, а також нетерових крайових задач для них.

Abstract. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of linear systems of the integro-dynamic equations on time scales, and also Noether boundary-value problems for them are established by using the theory of Moore–Penrose pseudo-inverse matrices and the theory of difference systems.

Ольга Удовиченко
викладач кафедри інформатики
udovich_olga@fizmatsspu.sumy.ua

ЕЛЕКТРОННИЙ ПІДРУЧНИК ЯК ЗАТРЕБУВАНИЙ ОСВІТНІЙ РЕСУРС

Інформаційні технології були створені, щоб спростити життя людини, зменшити час, необхідний для виконання різноманітних типових завдань, полегшити робочу діяльність, а потім – і щоденне життя. І звісно вони щільно увійшли у процес навчання.

Часто ми не усвідомлюємо, яку суттєву нішу займають інформаційні технології у щоденності сучасного учня чи студента, а вони тим часом надають велику кількість різних можливостей. Це і інтеграція між різноманітними сферами діяльності (наприклад, за допомогою IT-технологій можна легше, швидше і наочніше продемонструвати та зрозуміти міжпредметні зв'язки), і збільшення мобільності учнів та викладачів, і полегшення освоєння усе зростаючих обсягів інформації.

Сьогодні ми живемо у світі, де невід'ємно злилися віртуальний інформаційний простір і соціальне життя, і навчання – сфера, що повинна завжди йти в ногу з часом, – не може не стикатися з цим.

Саме тому галузь освіти намагається увібрати у себе усе найкраще, що породжують новітні технології. У той же час інформаційні технології рідше розробляються під специфічний освітній проект на відміну від економіки чи промисловості. Тому сфера навчання повинна самостійно відсіювати та відбирати те найкраще, що можна інтегрувати до неї. Разом з цим швидке впровадження новацій стикається з перепонами як фінансового, так і особистісного характеру.

Впровадження інформаційних технологій в освітні заклади пройшло достатній шлях, щоб оцінити і виокремити найкраще в галузі інформатизації освіти. Накопичення кількісного показника технічних приладів (комп’ютери, проектори, мультимедійні дошки) зумовило перехід навчання на новий щабель – навчання з використанням електронних ресурсів.

Під електронними освітніми ресурсами (ЕОР) розуміють навчальні, наукові, інформаційні, довідкові матеріали та засоби, розроблені в електронній формі та представлені на носіях будь-якого типу або розміщені у комп’ютерних мережах, які відтворюються за допомогою електронних цифрових технічних засобів і необхідні для ефективної організації навчально-виховного процесу, в частині, що стосується його наповнення якісними навчально-методичними матеріалами [1].

На рис. 1 представлена класифікація ЕОР, яку запропоновано у Положенні про електронні освітні ресурси від Міністерства освіти, науки, молоді та спорту.

Рис. 1.

Серед електронних освітніх ресурсів пересічні вчителі завжди виокремлюють демонстраційні матеріали, тести і електронні підручники (ЕП). Зупинимось на них дещо докладніше.

Досить тривалий час електронний підручник ототожнювався з електронною версією текстового видання, тобто документ, створений у текстовому середовищі з науковим і систематизованим змістом міг вважатися електронним підручником. Коли кількість таких видань у мережі істотно збільшилася, науковці звернулися до проблеми однозначного тлумачення електронного підручника. Їх суперечки виникли ще на початку XXI століття і не припиняються до сьогодні [2]. Зазначимо лише, що кожного року технології розвиваються так, що можливим стає якісне вдосконалення напрацьованого продукту, який вважався спочатку ідеальним: якщо раніше електронним підручником вважався просто оцифрований паперовий підручник, то наразі під електронним підручником розуміють мультимедійний продукт, який відповідає цілій низці вимог.

Якщо характеризувати різновиди представлених в Інтернеті електронних книг, то вони відрізняються один від одного ступенем відмінності від традиційних поліграфічних підручників.

Найбільш поширене представлення електронних підручників – це, все ж таки, фотокопії паперового варіанту, які можна представити на екрані комп’ютера. Прикладом є формат DJVU, PDF та інші (рис. 2). У форматі DJVU зазвичай подані старі видання, але які ще вважаються актуальними.

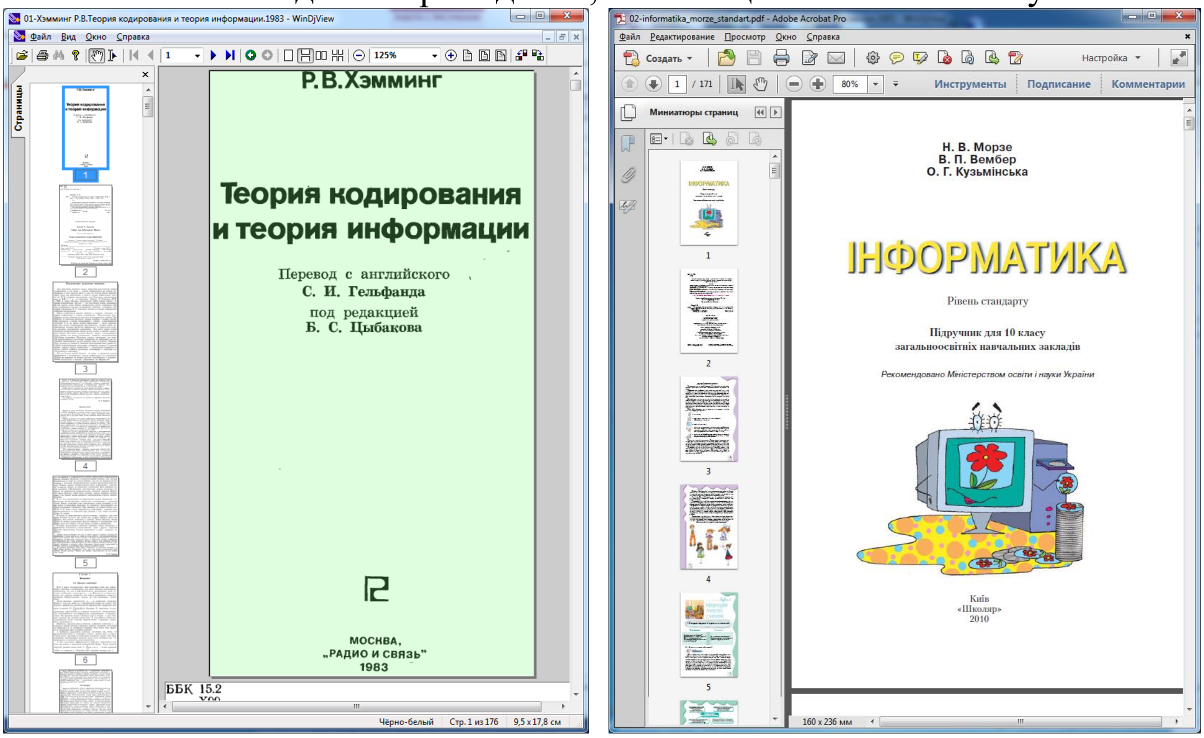

Рис. 2.

Таке представлення тексту має ряд переваг над паперовою версією книги. По-перше, передбачена можливість роздруковування тексту, по-друге, книгу можна переносити на інші електронні носії, по-третє, одразу переходити на будь-яку сторінку і, по-четверте, збільшувати або зменшувати розміри сторінки, тим самим робити можливим детальний розгляд схем, малюнків тощо. Із створенням електронних книг з рідкокристалічними екранами типу eBook як накопичувачів достатньо великої кількості книг у студента відпадає потреба сидіти в бібліотеці.

Недоліком такого формату книг є те, що у них не можна вносити зміни. Хоча на виготовлення такої книги витрачається найменша кількість часу, та і для створення таких книг рівень володіння комп'ютером потрібний не високий.

Так, наприклад, за допомогою програми Microsoft Word 2010 можна перетворювати файли у формат PDF, не використовуючи додаткове програмне забезпечення і не встановлюючи додатків. Варто зазначити, що даний формат підтримує збереження гіперпосилань.

Як було зазначено, неправильно розуміти під електронним підручним лише «цифрову» версію звичайного паперового підручника. Розвиток інформаційних технологій вимагає нових підходів до подання навчальних матеріалів. Зокрема, наразі вже є звичним використання гіпертексту, глосарію, складної структури з перехресними посиланнями.

Педагогічні і методичні дослідження підтверджують, що гіпертекстова технологія подання матеріалу дозволяє не тільки представити інформацію як сукупність взаємозв'язаних понять, а і передбачити певний рівень самостійності у навчанні, тобто учень (студент) буде сам зіставляти різні фрагменти, відбирати потрібну інформацію тощо. Гіпертекст дає можливість самостійно визначати глибину «занурення в тему», дозволяє абсолютно інакше сприймати і засвоювати навчальну інформацію.

Деякі науковці йдуть далі і ототожнюють ЕП з цілим навчальним комплексом, що включає в себе і мультимедійні додатки, і інтерактивність, і автоматизований контроль проходження курсу.

Спроба створити такий ЕП була і студентів фізико-математичного факультету у рамках курсового дослідження. Так було створено ЕП «Векторна графіка» з нелінійною гіпертекстовою навігацією, який окрім теоретичного матеріалу містить презентації, відеоматеріали та засоби контролю у вигляді тесту. Оскільки такий підручник має структуру, подібну web-сторінкам, створення такого продукту вимагає ще й знань з web-дизайну.

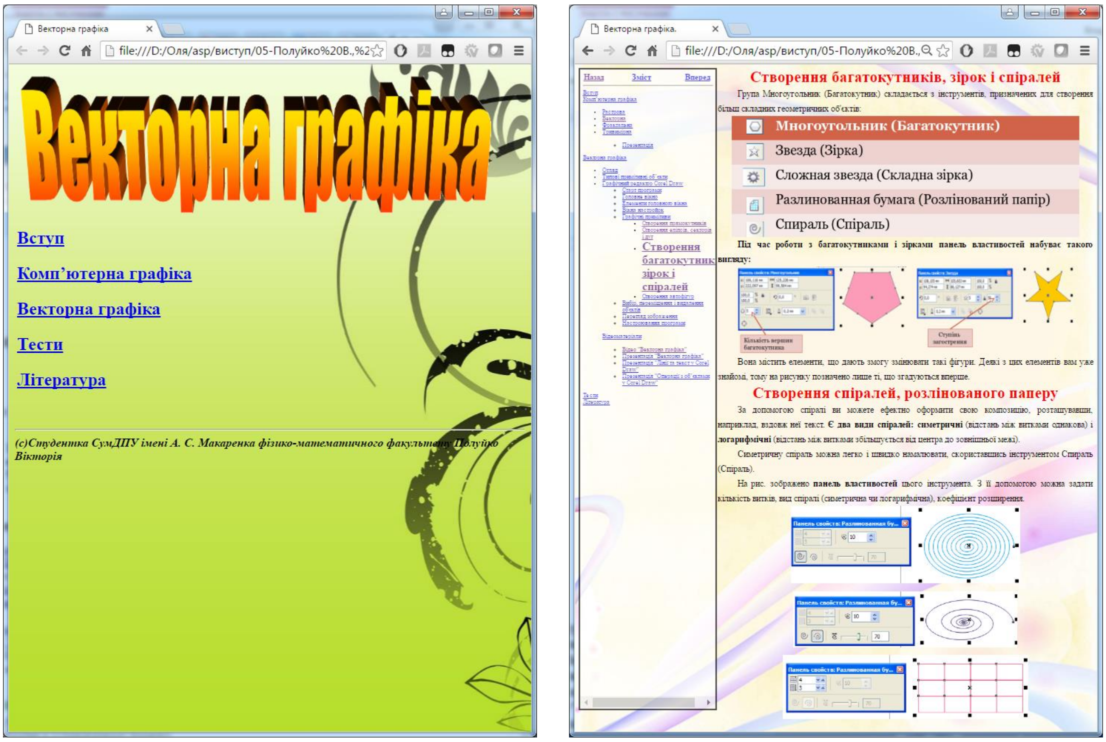

Рис. 3.

Можна сміливо стверджувати, що створення якісного продукту вимагає не тільки великих витрат часу, а й спільної та злагодженої роботи цілої команди фахівців (автори-розробники спецкурсу, програмісти, дизайнери, методисти, психологи). При цьому не останньою мотивацією створення ЕП є нестримне бажання та ентузіазм всієї команди (такі проекти, на жаль, не фінансуються), яка розуміє потребу саме в електронних освітніх ресурсах, серед яких електронний підручник займає поки що перші позиції.

Список використаних джерел

1. Положення про електронні освітні ресурси [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/z1695-12#n13
2. Удовиченко О.Н. Электронный учебник как современное средство обучения: анализ определений / О.Н. Удовиченко // Вестник ТулГУ. Серия Современные образовательные технологии в преподавании естественнонаучных дисциплин. Вып. 12. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2013. – С. 197-202.

Анотація. Удовиченко О. Електронний підручник як затребуваний освітній ресурс. *У статті представлена класифікація електронних освітніх ресурсів. Обґрунтовано, чому саме електронний підручник посідає провідне місце в системі ЕОР. Подано результати аналізу на предмет, які види ЕП представлені в мережі Інтернет.*

Ключові слова: *електронний підручник, електронний освітній ресурс.*

Abstract. Udovychenko O. Electronic textbook as a demanded educational resource. *The article presents the classification of electronic educational resources. Proved why electronic textbook takes a leading place in the EER. The article presents an analysis of what types of electronic textbook are presented on the Internet.*

Keywords: *electronic textbook, electronic educational resource.*

Юрій Хворостіна
старший викладач кафедри математики
khvorostina13@mail.ru

НЕСКІНЧЕННІ ЗГОРТКИ БЕРНУЛЛІ, ПОВ'ЯЗАНІ ЗІ ЗНАКОЗМІННИМИ РЯДАМИ ЛЮРОТА

Вступ

Розглянемо дві незалежні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 з відповідними їм функціями розподілу F_1 і F_2, характеристичними функціями f_1 і f_2, ймовірнісними мірами μ_1 і μ_2.

Означення. *Згорткою (або композицією) розподілів незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2 (або мір μ_1 і μ_2, або функцій розподілу F_1 і F_2) називається розподіл (або міра, або функція розподілу) випадкової величини $\xi = \xi_1 + \xi_2$.*

Якщо F_1, F_2, ..., F_k – функції розподілу, то їхню згортку позначають

$$\prod_{j=1}^{k}{}^{*} F_j = F_1 * F_2 * \dots * F_k.$$

Розглянемо нескінченну послідовність функцій розподілу (F_k). Кажуть, що нескінченна згортка функцій розподілу F_k збігається, якщо існує така функція розподілу F, що

$$F = \prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} F_k.$$

Теорема (Джессен-Вінтнер). *Нехай* $F = \prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} F_k$ є збіжна нескінченна згортка чисто дискретних функцій розподілу F_k. Тоді F є чистою, тобто або чисто дискретною, або чисто сингулярною або чисто абсолютно неперервною функцією розподілу.

Це твердження в термінах випадкових величин формулюється так: *сума кожного збіжного з ймовірністю* 1 *ряду із незалежних дискретно розподілених випадкових величин має чистий закон розподілу, тобто чисто дискретний, чисто сингулярний або чисто абсолютно неперервний.*

Означення. *Випадкова величина, яка є сумою збіжного з ймовірністю* 1 *ряду із незалежних дискретно розподілених випадкових величин називається випадковою величиною типу Джессена–Вінтнера.*

За теоремою 1.1 кожна випадкова велчина типу Джессена–Вінтнера має чистий розподіл. Проте ця теорема не дає відповіді на запитання, коли який розподіл: чисто дискретний, чисто сингулярний або чисто абсолютно неперервний. Ще раніше, у 1931 році, П. Леві довів таку теорему.

Теорема (П. Леві). *Нехай* $F = \prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} F_k$ є збіжна нескінченна згортка і p_k – максимальний стрибок функції розподілу F_k. Точковий спектр $D_F = \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0.$$

Теореми П.Леві та Джессена-Вінтнера дають необхідні і достатні умови дискретності нескінченної згортки, що полягають у збіжності нескінченого добутку.

Нехай $B(x)$ – функція розподілу дискретної випадкової величини, яка набуває значень -1 і 1 з імовірностями $1/2$ і $1/2$. Відповідною характеристичною функцією є функція $b(t) = \cos t$. Розглянемо послідовність (r_k) додатних чисел і послідовність функцій розподілу $F_k(x) = B(x/r_k)$.

Означення. *Нескінченна згортка*

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} F_k = \prod_{k=1}^{\infty}{}^{*} B\left(\frac{x}{r_k}\right)$$

називається *симетричною згорткою Бернуллі* (або просто *згорткою Бернуллі*).

1. Властивості розподілу випадкової величини з незалежними нега-двійковими символами

Розглянемо випадкову величину

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{A_k}, \qquad (1.1)$$

де (τ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно, причому $p_{0k} + p_{1k} = 1$. Розподіл в.в. τ є нескінченною згорткою Бернуллі, керованою знакозмінним рядом Люрота.

Множина всіх неповних сум $E(a_n) = \{x : x = \sum_{k \in K \subset \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{A_k},\ K \in 2^{\mathbb{N}}\}$ знакозмінного ряду Люрота, визначеного послідовністю (a_n), є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, якщо нерівність $a_n \neq 1$ виконується нескінченну кількість разів. Тому абсолютно неперервний розподіл можливий лише за умови $a_n = 1$ для всіх n, більших деякого n_0. Саме по цій причині даний випадок заслуговує на окрему увагу.

Відомо, що для довільного $x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_n \in \{0; 1\}$, така, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-2)^{n-1}} = \frac{\alpha_1}{2^0} - \frac{\alpha_2}{2^1} + \frac{\alpha_3}{2^2} - \frac{\alpha_4}{2^3} + \cdots \equiv \overline{\Delta}^{2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}. \qquad (1.2)$$

Символічний (скорочений) запис $\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ ряду (1.2) і його суми x називається *нега-двійковим зображенням.* Раціональні числа відрізка $\left[-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]$ мають періодичне нега-двійкове зображення, а деякі з них мають два формально різних зображення $\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\ldots\alpha_m 0(01)}$ і $\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\ldots\alpha_m 1(10)}$.

Це зображення має геометрію, яка відмінна від геометрії класичного двійкового зображення:

$$x=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\ldots\equiv\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Вона відображається у властивостях циліндричних множин.

Нехай $(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ — фіксований набір нулів та одиниць.

Означення 1.1 *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$, що відповідає нега-двійковому зображенню, називається множина $\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}$ всіх чисел, які мають зображення $\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+j}\ldots}$, $\alpha_{m+j}\in\{0,1\}, j\in N$.*

Циліндри мають властивості:

1. $\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}=\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 0}\cup\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 1}$.
2. Циліндр $\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}$ є відрізком, причому

$$\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}}=\left[\sum_{n=1}^{2k-1}\frac{(-1)^{n-1}c_n}{2^{n-1}}-\frac{1}{3\cdot 2^{2k-3}};\sum_{n=1}^{2k-1}\frac{(-1)^{n-1}c_n}{2^{n-1}}+\frac{1}{3\cdot 2^{2k-2}}\right];$$

$$\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_{2k}}=\left[\sum_{n=1}^{2k}\frac{(-1)^{n-1}c_n}{2^{n-1}}-\frac{1}{3\cdot 2^{2k-1}};\sum_{n=1}^{2k}\frac{(-1)^{n-1}c_n}{2^{n-1}}+\frac{1}{3\cdot 2^{2k-2}}\right].$$

3. $\max\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-2}0}=\min\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-2}1}$;
   $\min\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-1}0}=\max\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-1}1}$.
4. $\operatorname{diam}\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}=|\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}|=\frac{1}{2^{m-1}}$.
5. Основне метричне відношення:

$$\frac{|\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}|}=\frac{1}{2}.$$

6. Для будь-якої послідовності (c_n), $c_n\in\{0;1\}$ має місце рівність

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}=\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}.$$

Лема 1.1 *Строго зростаюча функція*

$$y=f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x,$$

яка відображає відрізок $\left[-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]$ на $[0;1]$, коректно визначається рівністю

$$f(\overline{\Delta}^2_{a_1a_2\ldots a_n\ldots})=\Delta^2_{a_1[1-a_2]a_3[1-a_4]a_5\ldots}. \tag{1.3}$$

Доведення. Справді, якщо $x=\overline{\Delta}^2_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$, то

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k-1}}{2^{2k-2}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{2^{2k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k-1}}{2^{2k-1}}+\left(\frac{1}{3}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{2^{2k}}\right)=$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-a_{2k}}{2^{2k}} = \Delta^2_{a_1[1-a_2]a_3[1-a_4]a_5\ldots}$$

Коректність означення функції f рівністю (1.3) могла б бути порушеною, якщо для двох різних нега-двійкових зображень числа

$$x = \overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 0(01)} = \overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 1(10)}$$

рівність (1.3) давала б різні результати (значення). Але

$$f(\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-1}0(01)}) = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k-2}]c_{2k-1}1(00)},$$

$$f(\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-1}1(10)}) = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k-2}]c_{2k-1}0(11)} = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k-2}]c_{2k-1}1(00)},$$

$$f(\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k}0(01)}) = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k}]1(00)},$$

$$f(\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k}1(10)}) = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k}]0(11)} = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k}]1(00)}.$$

Тому $f(\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 0(01)}) = f(\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 1(10)})$ для будь-якого набору $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ цифр двійкового алфавіту. Коректні означення функції f рівністю (1.3) доведено.

Лема 1.2 *Випадкова величина*

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi_n}{2^n},$$

де ψ_n – незалежні в. в. такі, що $P\{\psi_k = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\psi_k = 1\}$, має рівномірний на відрізку $\left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$ розподіл.

Доведення. Для доведення цього факту досить показати, що для довільного циліндра $\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}$ має місце рівність

$$P\{\psi \in \overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}\} = \frac{1}{2}|\overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{2^m}.$$

Оскільки випадкові величини ψ_k незалежні і мають вказані розподіли, то

$$P\{\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2, \ldots, \psi_n = c_n, \ldots\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k k} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^m} = 0.$$

Враховуючи геометрію знакозмінного ряду Люрота (властивості циліндричних множин неповних сум ряду), маємо

$$P\{\psi \in \overline{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}\} = P\{\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2, \ldots, \psi_m = c_m\} = \prod_{k=1}^{m} p_{c_k k} = \frac{1}{2^m},$$

що й вимагалося довести.

Наслідок 1.1 *Якщо існує* $n_0 \in \mathbb{N}$ *таке, що при* $n \geq n_0$ *для послідовності незалежних випадкових величин* ψ'_n *виконуються рівності* $P\{\psi'_n = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\psi'_n = 1\}$, *то розподіл випадкової величини*

$$\psi' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi'_n}{2^n}$$

є кусково рівномірним.

Справді, випадкову величину ψ' можна подати у вигляді:

$$\psi' = \hat{\psi} + \frac{1}{2^{n_0}} \psi,$$

де $\widehat{\psi}=\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k\psi_n}{2^k}$, а ψ – рівномірно розподілена випадкова величина за лемою 1.2. Враховуючи геометрію циліндричних зображень точок множини неповних сум даного ряду, в.в. ψ' є рівномірно розподіленою на всіх циліндричних відрізках n_0-го рангу таких, що $\Delta_{j_1 j_2 \dots j_{n_0}}$, $p_{j_k k}>0$, $k=\overline{1,n_0}$.

Нехай

$$\delta_k(x)=\delta_k(\overline{\Delta}^2_{a_1(x)a_2(x)\dots a_n(x)\dots})=\begin{cases}a_k(x), & \text{якщо } k-\text{непарне},\\ 1-a_k(x), & \text{якщо } k-\text{парне}.\end{cases}$$

Теорема 1.1 1. *Неперервно розподілена випадкова величина*

$$\tau_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{2^{k-1}}\equiv\overline{\Delta}^2_{\tau_1\tau_2\dots\tau_k\dots},$$

нега-двійкові цифри τ_k якої є незалежними і мають розподіли:

$$P\{\tau_k=i\}=p_{ik},\ \ i\in\{0;1\},$$

має: 1.1 *абсолютно неперервний розподіл, якщо*

$$L\equiv\sum_{k=1}^{\infty}(1-2p_{\delta_k k})^2<\infty,$$

причому експоненціальний розподіл зі щільністю $f(x)=\frac{\beta}{e^{\beta}-1}\cdot e^{\beta x}$, $-\infty<\beta<\infty$, *якщо*

$$p_{0k}=\begin{cases}(1+e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1}, & \text{якщо } k-\text{непарне},\\ 1-(1+e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1}, & \text{якщо } k-\text{парне}.\end{cases}$$

1.2 *сингулярний розподіл, якщо* $L=\infty$.

2. *Її функція розподілу зберігає фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича тоді і тільки тоді, коли у матриці* $\|\ p_{ik}\ \|$ *відсутні нулі і*

$$\lim_{k\to\infty}p_{0k}=\frac{1}{2}.$$

Доведення. З леми 1.1 випливає, що випадкові величини

$$\tau_0=\overline{\Delta}^2_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}\quad \text{і}\quad \bar{\tau}=\Delta^2_{\tau_1[1-\tau_2]\tau_3[1-\tau_4]\dots}$$

де τ_n – незалежні випадкові величини, що мають розподіл $P\{\tau_k=i\}=p_{ik}$, $i=\{0;1\}$, мають еквівалентні розподіли.

З незалежності членів послідовності (τ_n) випливає незалежність членів послідовності (τ'_n)

$$\tau'_n=\begin{cases}\tau_n, & \text{якщо } k-\text{непарне},\\ 1-\tau_n, & \text{якщо } k-\text{парне}.\end{cases}$$

Оскільки властивості розподілу випадкової величини

$$\bar{\tau}=\Delta^2_{\tau'_1\tau'_2\dots\tau'_n\dots}$$

вивчались у роботах [5, 2, 4], то, проінтерпретувавши відомі факти для $\bar{\tau}$ у термінах означення в.в. τ, ми отримаємо перше твердження з використанням результатів статей [2, 4], а друге – роботи [5].

Наслідок 1.2 *Якщо* $p_{0k}=p_0=const\neq\frac{1}{2}$, *причому* $0<p_0<1$, *то функція розподілу в.в.* τ *є строго зростаючою сингулярною функцією*

$(\lambda\{x\colon F'(x) \neq 0\} = 0)$, *причому для її математичного сподівання та дисперсії мають місце рівності:*

$$M\tau = \frac{2}{3}p_1; \qquad D\tau = \frac{3}{4}p_0 p_1.$$

Справді, оскільки

$$\tau = \tau_1 - \frac{1}{2}\left(\tau_2 - \frac{\tau_3}{2} + \ldots\right) = \tau_1 - \frac{1}{2}\hat{\tau},$$

де випадкові величини τ, $\hat{\tau}$ мають однаковий розподіл, то, враховуючи властивості математичного сподівання, маємо

$$M\tau = M\tau_1 - \frac{1}{2}M\hat{\tau}.$$

Звідси

$$M\tau = \frac{2}{3}p_1.$$

За означенням та властивостями дисперсії маємо

$$D\tau = M(\tau - M\tau)^2 = M\tau^2 - (M\tau)^2.$$

$$D\tau = D\left(\tau_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\hat{\tau}\right) = D\tau_1 + \frac{1}{4}D\hat{\tau}.$$

Звідси

$$D\tau = \frac{3}{4}D\tau_1 = \frac{3}{4}(M\tau_1^2 - (M\tau_1)^2) = \frac{3}{4}(p_1 - p_1^2) = \frac{3}{4}p_0 p_1. \qquad \blacksquare$$

Лема 1.3 *Якщо випадкова величина X має експоненціальний розподіл на відрізку* $\left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$ *з функцією розподілу*

$$F_X(x) = \frac{1}{e^{\beta}-1}\left(e^{\beta(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3})} - 1\right), \qquad -\infty < \beta < +\infty,$$

то цифри ϕ_k у представленні X нега-двійковим дробом $\overline{\Delta}^2_{\phi_1\phi_2\ldots\phi_k\ldots}$ є незалежними випадковими величинами з розподілами

$$P\{\phi_k = 0\} = \begin{cases} (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1}, & \text{якщо } k \text{ – непарне,} \\ 1 - (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1}, & \text{якщо } k \text{ – парне.} \end{cases};$$

$$P\{\phi_k = 1\} = \begin{cases} 1 - (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1}, & \text{якщо } k \text{ – непарне,} \\ (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1}, & \text{якщо } k \text{ – парне.} \end{cases}$$

Доведення. Враховуючи неперервність розподілу в. в. X, маємо

$$P\{\phi_1 = 0\} = P\{X \in \overline{\Delta}^2_0\} = F_X\left(\overline{\Delta}^2_{0(01)}\right) - F_X\left(\overline{\Delta}^2_{0(10)}\right) = \frac{1}{1+e^{\frac{\beta}{2}}}$$

$$P\{\phi_1 = 1\} = 1 - P\{\phi_1 = 0\} = \frac{e^{\frac{\beta}{2}}}{1+e^{\frac{\beta}{2}}}.$$

Виразимо умовну ймовірність

$$P\left\{\phi_{k+1} = 0/_{\phi_1=c_1\ \wedge\ \phi_2=c_2\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ \phi_k=c_k}\right\} = \frac{P\left\{X \in \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_k0}\right\}}{P\left\{X \in \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_k}\right\}}.$$

Якщо k – непарне число, то

$$P\left\{X \in \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_k}\right\} = F_X\left(\Delta^2_{c_1c_2\ldots c_k(01)}\right) - F_X\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_k(10)}\right) =$$

$$= \frac{1}{e^{\beta}-1} e^{\beta \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1} c_i}{2^i}} \left(e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}} - 1\right)\left(e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}} + 1\right),$$

$$P\left\{X \in \overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \dots c_k 0}\right\} = F_X\left(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \dots c_k 0(10)}\right) - F_X\left(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \dots c_k 0(01)}\right) =$$

$$= \frac{1}{e^{\beta}-1} e^{\beta \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1} c_i}{2^i}} \left(e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}} - 1\right) e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}}.$$

$$P\left\{\phi_{k+1} = 0 /_{\phi_1 = c_1 \,\wedge\, \phi_2 = c_2 \,\wedge\, \dots \,\wedge\, \phi_k = c_k}\right\} = \frac{e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}}}{1 + e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}}},$$

Якщо k – парне число, то

$$P\left\{X \in \overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \dots c_k}\right\} = F_X\left(\Delta^2_{c_1 c_2 \dots c_k (10)}\right) - F_X\left(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \dots c_k (01)}\right) =$$

$$= \frac{1}{e^{\beta}-1} e^{\beta \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1} c_i}{2^i}} e^{\frac{\beta}{2^k}} \left(e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}} - 1\right)\left(e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}} + 1\right),$$

$$P\left\{X \in \overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \dots c_k 0}\right\} = F_X\left(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \dots c_k 0(01)}\right) - F_X\left(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \dots c_k 0(10)}\right) =$$

$$= \frac{1}{e^{\beta}-1} e^{\beta \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1} c_i}{2^i}} e^{\frac{\beta}{2^k}} \left(e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}} - 1\right).$$

$$P\left\{\phi_{k+1} = 0 /_{\phi_1 = c_1 \,\wedge\, \phi_2 = c_2 \,\wedge\, \dots \,\wedge\, \phi_k = c_k}\right\} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\beta}{2^{k+1}}}},$$

Тому умовна ймовірність $P\left\{\phi_{k+1} = 0 /_{\phi_1 = c_1 \,\wedge\, \phi_2 = c_2 \,\wedge\, \dots \,\wedge\, \phi_k = c_k}\right\}$ не залежить від набору цифр $c_1, c_2, \dots, c_k$, що свідчить про незалежність випадкової величини ϕ_{k+1} від $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$.

Тоді

$$P\{\phi_{k+1} = 1\} = 1 - P\{\phi_{k+1} = 0\},$$

що й вимагалось довести.

2. Лебегівська структура розподілу випадкової неповної суми заданого знакозмінного ряду Люрота

Згідно з теоремою Джессена-Вінтнера [99] випадкова величина τ має чистий лебегівський тип розподілу: чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний, причому критейрій дискретності є наслідком відомої теореми П. Леві [107]: розподіл τ є дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0. \tag{1.4}$$

Теорема 1.2 *Неперервний розподіл випадкової величини τ є:*

1. *абсолютно неперервним, якщо існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \geq n_0$ має місце рівність $a_n = 1$, і виконується умова:*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_{0k} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{p_{1k} \cdot \frac{1}{2}}\right) > 0 \sim L \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - p_{0k}\right)^2 < \infty; \tag{1.5}$$

2. *чисто сингулярним в решті випадків, тобто $L = \infty$ або $a_n \neq 1$ нескінченну кількість разів.*

Доведення. Нехай $M = 0$ і елементи знакозмінного ряду Люрота $a_n = 1$ для всіх n більших деякого n_0. При $n_0 > 1$ представимо випадкову величину τ у вигляді

$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)},$$

$$\tau^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{\tau_j(-1)^{j+1}}{A_j} \text{ і } \tau^{(2)} = \frac{(-1)^{n_0-1}}{A_{n_0-1}(a_{n_0-1}+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_j(-1)^k}{2^k}$$

Випадкові величини $\tau^{(1)}$ і $\tau^{(2)}$ є незалежними, бо незалежними є випадкові величини τ_n. Випадкова величина $\tau^{(1)}$ має дискретний розподіл, а тому випадкові величини τ і $\tau^{(2)}$ мають одночасно абсолютно неперервний чи сингулярно неперервний розподіли. Тому, не порушуючи загальності, вважатимемо $n_0 = 1$.

Нехай $\{(\Omega_k, B_k, \mu_k)\}$ і $\{(\Omega_k, B_k, \nu_k)\}$ дві послідовності ймовірнісних просторів такі, що для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$\Omega_k = \{0;\ 1\}, B_k - \sigma \text{ – алгебра всіх підмножин } \Omega_k$$

$$\mu_k(0) = p_{0k},\ \ \mu_k(1) = p_{1k},\ \ \nu_k(0) = \tfrac{1}{2} = \nu_k(1).$$

Очевидно, що $\mu_k \ll \nu_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів:

$$(\Omega, B, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, B_k, \mu_k), \qquad (\Omega, B, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, B_k, \nu_k).$$

З теореми Какутані [1] випливає, що $\mu \ll \nu$ тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \rho(\mu_k, \nu_k) > 0, \quad \text{де } \rho(\mu_k, \nu_k) = \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}}\, d\nu_k \text{ – інтеграл Хелінгера}$$

У даному випадку

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}}\, d\nu_k > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_{0k} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{p_{1k} \cdot \frac{1}{2}} \right) > 0.$$

Використавши розклад Тейлора функції $y = \sqrt{1+x}$, отримаємо, що останній добуток збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1 - 2p_{0k})^2 + (1 - 2p_{1k})^2] < \infty. \tag{1.6}$$

Оскільки $(1 - 2p_{0k})^2 + (1 - 2p_{1k})^2 = 2(1 - 2p_{0k})^2$, то ряди (1.6) і L збігаються одночасно.

Отже, з умови (1.5) випливає умова абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν.

Розглянемо вимірне відображення $\Omega \xrightarrow{f} \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$, яке визначене рівністю:

$$\forall \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots) \in \Omega : f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_k}{2^k}.$$

Для довільної борелівської множини E визначимо образи μ^* і ν^* мір μ і ν під дією відображення f наступним чином:

$$\mu^*(E) = \mu(f^{-1}(E)), \qquad \nu^*(E) = \nu(f^{-1}(E)).$$

Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою P_τ, а міра ν^* – з ймовірнісною мірою P_ψ. За лемою 1.2 ймовірнісна міра P_ψ еквівалентна мірі Лебега λ. З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν випливає абсолютна неперервність міри μ^* відносно міри ν^*. Оскільки міра ν^* еквівалентна мірі λ, то з умови (1.5) випливає абсолютна неперервність розподілу випадкової величини τ.

Отже, для неперервно розподіленої в.в. τ, якщо $a_n = 1$ для всіх натуральних n більших деякого n_0 і деяка підпослідовність $p_{\tau_k k}$ досить швидко збігається до $\frac{1}{2}$, то розподіл випадкової величини τ буде абсолютно неперервним, а якщо підпослідовність $p_{\tau_k k}$ збігається до значення, відмінного від $\frac{1}{2}$, або $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень, то розподіл τ буде сингулярним.

Наслідок 1.3 *Належність розподілу випадкової величини τ до типу дискретних не залежить від заданого знакозмінного ряду Люрота, а залежить лише від стохастичної матриці $\| p_{ik} \|$.*

Теорема 1.3 *Множина атомів дисретного розподілу випадкової величини τ складається з точок виду*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\varepsilon_n}{A_n}, \varphi\chi \ \ \varepsilon_n \in \{0, 1\}, \tag{1.7}$$

для яких $p_{\varepsilon_n n} \neq 0$ та існує таке $n_0 \in N$, що для всіх $k \geq n_0$ виконуються рівності $p_{\varepsilon_k k} = max\{p_{0k}, p_{1k}\}$.

Доведення. Нагадаємо, що число x є атомом розподілу випадкової величини τ, якщо його маса додатна, тобто $P\{\tau = x\} > 0$. Позначимо за D_τ – множину атомів (точковий спектр) дискретного розподілу випадкової величини τ.

Розглянемо число

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}c_n}{A_n}, \varphi\chi \ \ c_n \in \{0, 1\}$$

таке, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності $p_{c_n n} = \max\{p_{0n}, p_{1n}\}$. Тоді, враховуючи незалежність τ_k і властивості циліндричного представлення точки x_0, маємо

$$P\{\tau = x_0\} = \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} = M.$$

Оскільки розподіл в.в. τ – дискретний, то за теоремою 1.2 число $M > 0$ і x_0 є атомом розподілу в.в. τ з масою M.

Нехай $E_i = \{\varepsilon_i\colon \ \varepsilon_i \in \{0, 1\}, p_{\varepsilon_i i} > 0\}$. Для довільних $k \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$B_k = \{x\colon x = \frac{\varepsilon_1}{A_1} - \cdots + \frac{(-1)^k\varepsilon_{k-1}}{A_{k-1}} + \frac{(-1)^{k-1}c_k}{A_k} + \frac{(-1)^k c_{k+1}}{A_{k+1}} + \cdots, \ \ \varepsilon_i \in E_i\}.$$

Для цих множин виконуються наступні включення

$$\{x_0\} = B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset B_{n+1} \dots .$$

Тоді

$$P\{\tau \in B_n\} = \sum_{\varepsilon_1 \in E_1} \sum_{\varepsilon_2 \in E_2} \dots \sum_{\varepsilon_n \in E_n} \left(\prod_{i=1}^{n-1} p_{\varepsilon_i i} \cdot \prod_{j=n}^{\infty} p_{c_j j} \right) =$$

$$= \left(\prod_{j=n}^{\infty} p_{c_j j}\right) \sum_{\varepsilon_1 \in E_1} \sum_{\varepsilon_2 \in E_2} \dots \sum_{\varepsilon_n \in E_n} \prod_{i=1}^{n-1} p_{\varepsilon_i i} =$$
$$= \prod_{j=n}^{\infty} p_{c_j j} = \frac{M}{\prod_{j=1}^{n-1} p_{c_j j}} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Оскільки для дискретно розподіленої випадкової величини $P\{\tau \in D_\tau\} = 1$, то $D_\tau = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

Лема 1.4 *Якщо* (τ_k) *– послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин і* $a_k = const = a$ *для будь-якого натурального* k*, то математичне сподівання розподілу випадкової величини* τ *обчислюється за формулою*

$$M\tau = \frac{a+1}{a^2+a+1} \cdot p_1$$

Доведення.

$$\tau = \frac{\tau_1}{a} - \frac{1}{a(a+1)}\left(\frac{\tau_2}{a} - \frac{\tau_3}{a(a+1)} + \dots\right) = \frac{\tau_1}{a} - \frac{1}{a(a+1)}\tau.$$
$$M\tau = M\left(\frac{\tau_1}{a}\right) - \frac{1}{a(a+1)} M\tau,$$
$$\left(1 + \frac{1}{a(a+1)}\right) M\tau = \frac{p_1}{a},$$
$$M\tau = \frac{a+1}{a^2+a+1} \cdot p_1.$$

Лема 1.5 *Якщо послідовність натуральних чисел* (a_n) *є чисто періодичною, тобто існує* $t \in \mathbb{N}$ *таке, що для будь-яких* $n \in \mathbb{N}$ *і* $j \in \mathbb{N}$

$$a_{np+j} = a_j,$$

то математичне сподівання випадкової неповної суми

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \frac{(-1)^{k+1}}{A_k}, \quad A_k = a_1(a_1+1)\dots a_{k-1}(a_{k-1}+1)a_k,$$

відповідного знакозмінного ряду Люрота з незалежними однаково розподіленими кеофіцієнтами τ_n $(P\{\tau_n = i\} = p_i,\ i = \overline{0,1})$ *обчислюється за формулою*

$$M\tau = p_1 \left(1 + \frac{(-1)^{t+1}}{A_t(a_t+1)}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{t} \frac{(-1)^{j+1}}{A_j}. \qquad (1.8)$$

Доведення. Очевидно, що

$$\tau = \frac{\tau_1}{A_1} - \frac{\tau_2}{A_2} + \dots + \frac{\tau_t(-1)^{t+1}}{A_t} + \frac{(-1)^{t+2}}{A_t(a_t+1)}\hat{\tau},$$

де τ і $\hat{\tau}$ – однаково розподілені випадкові величини.

Враховуючи незалежність і однакову розподіленість τ_n, властивості математичного сподівання та однакову розподіленість τ і $\hat{\tau}$, отримаємо

$$M\tau = M\left(\frac{\tau_1}{A_1} - \frac{\tau_2}{A_2} + \dots + \frac{\tau_t(-1)^{t+1}}{A_t}\right) + \frac{(-1)^{t+2}}{A_t(a_t+1)} M\tau.$$

Звідки

$$\left(1 - \frac{(-1)^{t+2}}{A_t(a_t+1)}\right) M\tau = p_1 \sum_{j=1}^{t} \frac{(-1)^{j+1}}{A_j},$$

а, отже, має місце рівність (1.8).

3. Спектральна структура сингулярного розподілу

випадкової неповної суми знакозмінного ряду Люрота

Спектром S_τ розподілу випадкової величини τ згідно означення є множина всіх точок росту її функції розподілу, тобто мінімальна замкнена множина, на якій зосереджений розподіл τ:

$$S_\tau = \{x: F_\tau(x+\varepsilon) - F_\tau(x-\varepsilon) > 0 \forall \varepsilon > 0\} =$$
$$= \{x: \mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \forall \varepsilon > 0\}.$$

Якщо $p_{ik} > 0$ для всіх $i \in \{0,1\}$ і $k \in N$, то спектр S_τ співпадає з множиною всіх неповних сум знакозмінного ряду Люрота.

У загальному випадку має місце наступне твердження.

Лема 1.6 *Спектром розподілу випадкової величини τ є замикання множини*

$$E = \{x: x = \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}, p_{\varepsilon_k k} > 0 \forall k \in N\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_\tau$. Нехай $\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots} = x \in E$. Тоді

$$P\{\tau \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\varepsilon_i i} > 0 \forall k \in N.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує k таке, що

$$\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k} \subset (x-\varepsilon; x+\varepsilon).$$

Тому

$$P\{\tau \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon) \geq P\{\tau \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}\} > 0,$$

тобто $x \in S_\tau$ і $E \subset S_\tau$.

2. Покажемо тепер, що $S_\tau \subset E$. Нехай $x \in S_\tau$, тобто

$$P\{\tau \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \forall \varepsilon > 0. \qquad (1.9)$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{\varepsilon_k k} = 0$. Тоді

$$P\{\tau \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\varepsilon_i i} = 0.$$

Розглянемо довільне x таке, що $x = \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}$. Можливі випадки:

1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \subset \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$;

2) $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \not\subset \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку

$$P\{\tau \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} \leq P\{\tau \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}\} = 0,$$

що суперечить (2.4).

У другому випадку x є односторонньо граничною точкою множини C_r. Для конкретності, нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$(x-\varepsilon; x) \subset \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}, P\{\tau \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}\} = 0.$$

І в цьому випадку

$$P\{\tau \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} = P\{\tau \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}\} = 0,$$

що суперечить умові (2.4). Отримане протиріччя доводить, що $p_{\varepsilon_k k} > 0$ для довільного $k \in N$, тобто $x \in E$.

Отже, $S_\tau = E$, що й вимагалось довести.

Теорема 1.4 *Якщо добуток (1.4) розбігається до нуля і $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n, то розподіл τ є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Доведення. Якщо $M = 0$, то за теоремою 1.2 розподіл є неперервним. Оскільки за теоремою 2.1 міра Лебега $\lambda(C_r) = 0$, якщо $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n, то і $\lambda(S_\tau) = 0$. Отже, τ має сингулярний розподіл канторівського типу, що й вимагалось довести.

Список використаних джерел

1. Kakutani S. Equivalence of infinite product measures / S. Kakutani // Ann. of Math. – 1948. – Vol. 49. – P. 214–224.
2. Marsaglia G. Random variables with independent binary digits / G. Marsaglia. – Ann. Math. Statist. – 1971. – Vol. 12, no. 6. – P. 1922–1929.
3. Pratsiovytyi M.. Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements / Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu. // Random Oper. Stoch. Equ. – 2013. – Vol. 21, no. 4.– P. 385-401.
4. Salem R. On some singular monotonic functions which are strictly increasi-ng / R. Salem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – Vol. 53, no. 3. –P. 427–439.
5. Працьовитий М. В. Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Динамічні системи: Праці Українського математи-чного конгресу–2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 77–93.
6. Працьовитий М.В. Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній / Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2009. – №10. – С.14-28.
7. Працьовитий М.В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування / Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2010. – №11. – С.102-118.
8. Хворостіна Ю.В. Випадкові неповні суми знакозмінного ряду Люрота, доданки якого утворюють однорідний ланцюг Маркова / Хворостіна Ю.В. // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2011. – №12 .– С.37-46.
9. Працьовитий М.В. Властивості розподілу випадкової неповної суми заданого знакозмінного ряду Люрота з незалежними коефіцієнтами / М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна // Наук. час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – 2013. – №14. – С.126-138.
10. Працьовитий М.В. Випадкова величина, символи $\tilde{L}$-зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю / Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2014. – Вип. 91. – С.146-157.

Анотація. ***Хворостіна Ю.* Нескінченні згортки Бернуллі, пов'язані зі знакозмінними рядами Люрота.** У статті досліджується лебегівська структура розподілу, спектральна структура сингулярного розподілу, тополого-метричні та фрактальні властивості спектра випадкової величини, яка є випадковою неповною сумою заданого знакозмінного ряду Люрота, коефіцієнти яких є незалежними випадковими величинами.

Ключові слова: знакозмінний ряд Люрота, $\tilde{L}$-зображення, лебегівська структура розподілу, спектральна структура сингулярного розподілу, розмірність Хаусдофа-Безиковича носія, нескінченні згортки Бернуллі, неповна сума ряду.

Abstract. *Khvorostina Y.* Infinite Bernoulli convolution that are connected with alternating Luroth series. In the article we study the random subsums of given series with the independence random coefficients. The content of discrete, absolutely continuous and singular continuous components in Lebesgue structure of distributions of these random variables is studied. In addition, the belonging of the singular distribution to Cantor, Salem or quasi-Cantor type is investigated. The topological, metric and fractal properties of the minimal closed support of the distribution of random variables are described.

Key words: alternating Luroth series, $\tilde{L}$-expansion, Lebesgue structure of probability distribution, spectrums structure of singular distribution, Hausdorff-Besicovitch dimension, infinite Bernoulli convolution, subsums of the series.

Наталія Шамшина
викладач кафедри інформатики
shamichek@ukr.net

СТВОРЕННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ДІАГРАМ В EXCEL

Інтерактивні технології – це порівняно новий, творчий, цікавий підхід до організації навчальної діяльності. Набутий вже сьогодні в Україні та за кордоном досвід переконливо засвідчує, що інтерактивні технології сприяють інтенсифікації та оптимізації навчального процесу.

Дослідження можливостей застосування у навчальному процесі офісних пакетів програм, таких як MS Office та Libre Office доводить, що їх компоненти можна використовувати для створення інтерактивних програмних засобів, які сприяють засвоєнню навчального матеріалу під час викладання різних дисциплін у школі та ВНЗ.

Інтерактивність – це здатність програми реагувати на дії користувача. В інформаційних системах інтерактивність – це здатність інформаційно-комунікаційної системи активно і різноманітне реагувати на дії людини, яка нею користується. Кажуть, що система «розумна», тобто володіє якимось інтелектом. Елементами інтерактивності є всі елементи системи, за допомогою яких відбувається взаємодія з іншою системою – людиною.

Якщо раніше дослідники більш уваги приділяли створенню та застосуванню у навчальному процесі інтерактивних презентацій [7-9], то зараз об'єктом вивчення стали технології створення інтерактивних елементів для відображення числових даних на комп'ютері [1-4].

Компонент MS Office, який призначений для виконання розрахунків та аналізу числових даних, і може відображати результати аналізу – програма Microsoft Excel. Користувачу легше зрозуміти велику кількість даних саме через діаграми в Excel. Таким чином предметом дослідження стали можливості Excel для створення інтерактивних діаграм. Проаналізувати технології створення інтерактивних діаграм в Excel та описати методи побудови інтерактивних діаграм – таки завдання було сформульовано у планах науково-методичної роботи. Результатом роботи стали публікації статей та студентських наукових робіт [1-4], розробка нової лабораторної роботи з курсу вивчення табличного процесора для студентів педагогічного університету фізико-математичного факультету.

Діаграма – це графічне зображення, в якому числові дані подаються у вигляді геометричних фігур. Діаграми в Excel будуються за даними, представленими в електронній таблиці и можуть відображати декілька рядів даних. В Excel можна побудувати діаграми 11 типів.

Інтерактивність діаграми досягається моделюванням окремих об'єктів «елементів управління», які не застосовують для побудови звичайних діаграм. Це – лічильник, смуги прокрутки, прапорець та випадаючий список. Для побудови елементів управління необхідно підключити спеціальну панель інструментів. В Excel 2007/2016 для цього необхідно відобразити вкладку «Розробник», а в Excel 2003 і більш старих версіях – панель інструментів Форми [5].

Налагодження елементів управління здійснюється через контекстне меню елементу. Будь який елемент управління має зв'язок з окремою коміркою, значення якої використовується для розрахунку числових рядів даних або параметрів діаграми. Таким чином, керуючи, наприклад, смугою прокрутки, або прапорцем, можна змінювати параметри, які впливають на зображення на діаграмі. Тобто, з'ясувавши які параметри потрібно змінювати для більш зручного перегляду даних, або як змінювати ряди даних, можна побудувати інтерактивну діаграму, яка буде динамічною та рухомою, наочно відображати лише ті дані які потрібні користувачеві на даний момент. Методи будови динамічних діаграм в Excel детально описані у статті у фізико-математичному журналі [4].

Користь і привабливість інтерактивних динамічних діаграм полягає в якісній візуалізації великого обсягу інформації, яка дозволяє підлаштовуватися під бажання користувача. А саме:

- вмикати-вимикати відображення окремих рядів даних на вибір
- рухатися по осі категорій вперед-назад, відображаючи обраний діапазон даних
- масштабувати, тобто, наближати-видаляти область побудови діаграми для вивчення графіка в деталях або в цілому
- комбінувати різні типи діаграм для одночасного відображення детальних і підсумкових даних.

Якісна візуалізація великого обсягу інформації – це майже завжди складне завдання, тому відображення всіх даних часто призводить до перевантаженості діаграми, її заплутаності і, в підсумку, до неправильного сприйняття і висновків. Тому для того щоб не допускати помилок, краще використовувати інтерактивну діаграму при особливо великої кількості статистичних або інших даних. Інтерактивна діаграма може відображати дані поетапно, що дає змогу демонструвати пов’язані між собою групи даних. Найбільш зручні динамічні інтерактивні діаграми для відображення економічних даних, таких як рівень продажів за групами товарів за певний проміжок часу, та зміни чисельності населення різних країн.

Під час дослідження з’ясувалося, що для створення дійсно інтерактивної діаграми, потрібно використати один або кілька динамічних діапазонів, а також підключити смугу прокрутки або випадаючий список, щоб відображати ті значення, які потрібно вивчити уважніше.

Динамічний іменований діапазон на числових рядах даних додає діаграмі гнучкості. Зв'язок динамічних іменованих діапазонів з елементами управління дозволяє користувачам змінювати дані діаграми за допомогою елементів управління, які одночасно будуть оновлювати дані на робочому аркуші. Але також за допомогою динамічних іменованих діапазонів можна створювати інтерфейси, керуючі даними, які виводяться на діаграму. Динамічний діапазон можна поєднати з випадаючим списком: спочатку додати динамічний діапазон, який буде використовуватися як джерело даних для діаграми, потім пов'язати динамічний діапазон із списком. Можна буде переглянути результати тесту будь-якого студента з групи студентів. У списку потрібно вибрати ім'я студента, результати якого ви хочете переглянути [1]. Тема використання динамічних діапазонів для побудови інтерактивних діаграм в Excel є актуальною. Навчитися створювати інтерактивні діаграми з використанням динамічних діапазонів – наступний крок в опануванні табличного процесора та здобуття професійних компетенцій майбутнього вчителя інформатики.

Створення найпростіших інтерактивних діаграм в Excel може стати у нагоді майбутнім вчителям математики. Так, наприклад, при вивченні теми «Функції та графіки» необхідна велика кількість ілюстративного матеріалу. Він не завжди є на плакатах, його зображення на дошці вимагає значних витрат часу і часто дуже схематично. Особливо, якщо мова йде про взаємне розташування графіків або про їх перетворення. У цьому випадку неоціненну допомогу вчителю можуть зробити комп'ютерні технології. З допомогою програми Excel учитель зможе не тільки підготувати необхідний матеріал для уроку, але й залучити учнів в практичну і дослідницьку діяльність з вивчення теми «Функції та графіки» [2].

Для дослідження математичних функцій необхідно використовувати точкову (X,Y) діаграму, яка відображає відповідні координатам X,Y точки на площині. Точкові діаграми з гладкими кривими використовують для побудови графіків функцій, попередньо заповнивши діапазон комірок значеннями аргументу і відповідними значеннями функції. Можна побудувати на одній діаграмі графіки декількох функцій для порівняння, або наближеного розв'язування рівняння, або розв'язування системи рівнянь. В даному випадку замість динамічних діапазонів можна використати рухому та масштабовану вісь X (категорій) шляхом задавання у окремих комірках таблиці початкового X_1 та кроку ΔX при табулюванні функції. Вигляд функції можна визначати задаванням коефіцієнтів у рівнянні функції, зміна яких призводить до автоматичного перерахунку значень функції на діапазоні. Формули для розрахунку значень аргументу і відповідних значень функції містять абсолютні посилання на ці комірки [6]. Якщо комірки зв’язати з елементами управління, отримаємо повноцінну інтерактивну діаграму.

В результаті проведеного дослідження скориговано зміст курсу з вивчення табличного процесора для студентів педагогічного університету фізико-математичного факультету. Додана лабораторна робота на тему «Побудова динамічних діаграм в Excel». В інструкції до роботи пояснюється призначення та переваги динамічних діаграм, на прикладах розглядаються способи побудови основних типів динамічних діаграм від простого до складного. Завдання лабораторної роботи спрямовані на закріплення отриманих знань і вироблення навичок роботи в Excel, необхідних для побудови інтерактивних динамічних діаграм: створення елементів управління та іменованих діапазонів, використання формул вибірки і аналізу даних, редагування і форматування діаграм різних типів.

Освоєння інтерактивних діаграм вимагає від студентів певних навичок роботи з формулами, функціями, діаграмами, попереднього знайомства з елементами управління. Тому, лабораторну роботу на побудову динамічних діаграм в Excel доцільно проводити в кінці курсу навчання з метою повторення пройденого матеріалу і вивчення нового.

Вивчення методів побудови динамічних діаграм в Excel не тільки готує студентів до подальшої професійної діяльності та підвищує їх рівень компетентності, а також розвиває творчу уяву і активізують пізнавальну діяльність. Динамічні діаграми, які є результатом виконання завдань, самі по собі настільки привабливі і дивні, що незмінно викликають позитивну мотивацію студентів в подальшому освоєнні сучасних інформаційних технологій. Результат навчання при цьому об'єднує в собі інтелектуальну і практичну складову освіти.

Список використаних джерел

1. Савостян М. Використання динамічних діапазонів для побудови інтерактивних діаграм в Excel // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця» (НПК-2015) м. Суми у 2-х томах, 2-3 грудня 2015 р. – Суми: ВВП «Мрія», 2015. – Т. 2, С. 73–75.
2. Слюсарева Ю. Застосування діаграм Excel при вивченні графіків математичних функцій. // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця» (НПК-2015) м. Суми у 2-х томах, 2-3 грудня 2015 р. – Суми: ВВП «Мрія», 2015. – Т. 2, С.60–61.
3. Шамшина Н. Изучение динамических диаграмм в Excel // Матеріали IX Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформаційні технології в професійній діяльності» 25 березня 2015 року м. Рівне. Рівне: РВВ РДГУ.– 2015.– 224 с. С. 195–196. (0,18 друк.арк.)
4. Шамшина Н. Методы построения динамических диаграмм в Excel // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми: СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2015. – № 1 (4). – С. 39-46. (0,43 друк.арк.)
5. Шамшина Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках информатики путем решения занимательных задач в Excel // Материалы Международной научно-практической конференции «Современные тенденции физико-математического образования: школа–вуз» 17 – 18 апреля 2015 года в двух частях. ФГБОУ ВПО «ПГНИУ»;– Соликамск: СГПИ, 2015. – 119 с. С.36-40. (0,34 друк.арк.)
6. Шамшина Н.В. Інформатика. Використання табличного процесора Microsoft Excel. Практикум / Н.В. Шамшина – видавництво СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2015.– 65 с. (3,25 друк.арк.)
7. Шамшина Н.В. Інтерактивні технології. // Наукова конференція за підсумками науково-дослідної і науково-методичної роботи кафедр Сумського державного університету ім.А.С.Макаренка у 2012 р. –

Суми: Видавництво СумДПУ ім.А.С.Макаренка, – 2013. – С.200-201. (0,05 друк.арк.)
8. Шамшина Н.В. Создание интерактивных презентаций в Power Point // III Міжвузівська науково-практична конференція «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця». – Суми. – 2012. – С.283-284.
9. Шамшина Н.В. Створення програмних засобів для контролю засвоєння знань за допомогою Power Point // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції «Інформаційні технології в навчальному процесі 2014», Чернігівський обласний інститут післядипломної освіти ім. К.Д.Ушинського, м. Чернігів, 9 грудня 2014 р.

Анотація. *Шамшина Н. Створення інтерактивних діаграм в Excel. В статті розглядається методика вивчення інтерактивних діаграм в Excel для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів.*
Ключові слова: *інтерактивні діаграми, Excel, методика вивчення*

Abstract. *Shamshina N. Create interactive charts in Excel. In the article the methodology of teaching interactive charts in Excel for students of physical and mathematical specialties of pedagogical universities are considered.*
Keywords: *interactive charts, Excel, methodology of teaching*

Інна Шишенко
Викладач кафедри математики
shiinna@yandex.ru

ДО ПРОБЛЕМИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ У КЛАСАХ З ГУМАНІТАРНИМ ПРОФІЛЕМ НАВЧАННЯ

Для забезпечення прикладної спрямованості шкільного курсу математики у класах з гуманітарним профілем навчання пропонуємо організовувати розв’язування учнями цих класів прикладних задач практичного характеру та якісних прикладних задач у вигляді портфоліо цих учнів.

Портфоліо учня з теми ми розуміємо як один з видів самостійної роботи учнів, який включає розв’язування прикладних задач практичного характеру та якісних прикладних задач у вигляді збору інформаційних матеріалів із зовнішніх джерел з їх наступним аналізом, кількісною та якісною оцінкою.

Головною особливістю введення портфоліо з розв'язування прикладних задач учнями класів з гуманітарним профілем навчання є орієнтація не на оволодіння конкретними математичними знаннями, не на формування навичок та вмінь розв'язувати типові математичні завдання, а на розвиток здатності відшуковувати розв'язання задачі без глибоких та широких математичних знань, навичок та вмінь та інтерпретувати результати задачі. Слід показати цим учням, що рівня їх знань, навичок та вмінь з математики їм достатньо, аби бути здатними застосовувати математику у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності. При цьому важливим є зосередження саме на з'ясуванні математичній суті того чи іншого явища, факту, прояв інтуїції та логічного мислення, а не виконання обчислень чи застосування конкретних формул та теорем. У такому разі у процесі виконання портфоліо буде зафіксовано саме успіхи учня, не наголошуватиметься на нижчому рівні можливостей цих учнів у вивченні математики, що сприятиме подоланню психологічних бар'єрів щодо вивчення математики, створенню позитивної мотивації до її вивчення та активізації пізнавальної діяльності учнів класів з гумантіарним профілем навчання на уроках математики.

Завданнями виконання учнями класів з гуманітарним профілем навчання портфоліо є:

- забезпечення мотивації учнів цих класів до вивчення математики;
- підвищення рівня їх активності та самостійності у процесі навчання математики;
- врахування індивідуальних особливостей та спрямованості інтересів та здібностей цих учнів;
- формування вмінь самостійно навчатися, а саме: ставити мету та завдання, планувати та організовувати власну освітню діяльність та оформляти її результати.

Як показали проведені дослідження, система роботи з виконання портфоліо з розв'язування прикладних задач має передбачати такі етапи: підготовчий; аналітичний; процесуальний; узагальнюючий; контролюючий.

На підготовчому етапі учні отримують прикладні задачі практичного чи якісного характеру, а вчитель математики роз'яснює мету виконання цього завдання. Цей етап має також відповідати етапу мотивації вивчення теми. Вчитель має запропонувати одну задачу до теми. Такі задачі можуть бути індивідуальними для кожного учня, можуть бути запропоновані для парної чи групової роботи учнів з різним рівнем навчальних можливостей. Учні мають провести самоаналіз мети та завдань виконання портфоліо, які компоненти математичної компетентності необхідні для його виконання. У результаті виконання даного етапу має з'явитися перший розділ портфоліо «Постановка та обґрунтування мети навчання теми.

Аналітичний етап передбачає аналіз умови та вимоги задачі учнями, з'ясування необхідних додаткових та довідкових даних, витрат часу для їх пошуку, можливостей виконання завдання, а також складання плану розв'язання завдання. Вчитель математики допомагає учням та проводить консультації, які також допомагатимуть вчителю контролювати хід виконання портфоліо. При виконанні даного етапу учні створюють другий розділ портфоліо «Щоденник дослідження», який передбачає такі частини: використане обладнання; необхідні та використані ресурси; додаткові зібрані дані; довідкові дані; теоретичний матеріал теми; план розв'язання задачі та інші.

Процесуальний етап передбачає безпосередню реалізацію плану розв'язання задачі, а узагальнюючий етап – оформлення результатів виконання портфоліо. Вчитель математики координує цей процес. На цьому етапі учні у третьому розділі «Розв'язання задачі» у довільній формі оформляють розв'язання: виконують необхідні рисунки, описують розрахунки, наводять теоретичні обґрунтування тощо.

Контролюючий етап доцільно проводити на етапі узагальнення та систематизації знань, навичок та вмінь учнів з теми. Тут учні ананлізують,чи були виконані поставлені у першому розділі завдання, які компетентності вони набули у ході розв'язання даної задачі, виконують самооцінку результатів, роблять висновки, чи досягнуто мету завдання, готують звіт про виконання портфоліо (виступ з доповіддю, презентація, папка з розділами виконання портфоліо), вчитель математики проводить оцінювання виконання портфоліо, у портфоліо створюється четвертий розділ «Результати виконання завдання».

Контроль та оцінювання виконання учнями портфоліо має відбуватися таким чином, аби учні прагнули вдосконалювати себе, свої здібності та нахили, розвивати пізнавальний інтерес, активність та самостійність у процесі навчання математики. При цьому рівень самостійності учнів теж не має впливати на оцінку за це завдання. Як показали дослідження, з об'єктивних причин досить складно передбачити окремий час для проведення доповідей за портфоліо на уроках. Тому наприкінці вивчення теми у позаурочний час доцільно проводити «Годину захисту портфоліо», де учні представляли власні напрацювання за отриманим завданням. Також учні мають здавати вчителю на перевірку портфоліо перед представленням доповіді.

Прикладні задачі практичного чи якісного характеру, які пропонуються учням для портфоліо, мають враховувати:

– спрямованість майбутніх професійних інтересів учнів класів з гуманітарним профілем навчання (переважно для завдань з алгебри та початків аналізу);

– можливості застосування виучуваного матеріалу у повсякденному житті (переважно для завдань зі стереометрії);
– зміст матеріалу виучуваної теми.

Наведемо прикладні задачі, які були запропоновані нами учням класів з гуманітарним профілем навчання у ході вивчення теми «Числові функції» для виконання портфоліо.

1) Визначте середній зріст та середню вагу різних порід собак, що найбільш розповсюджені в Україні. Складіть за отриманими даними таблицю та нанесіть дані на систему координат. Проаналізуйте, чи існує залежність ваги тіла собаки від її зросту. Побудуйте графік такої залежності та визначте цю залежність [1].

2) Безпечні стратегії ставок на спорт у букмекерських конторах описуються математичними формулами. Визначити, якою функцією буде задаватися розмір ставки у стратегії «Фіксований прибуток», якщо коефіцієнт на гру дорівнює 2,0. Проаналізувати дані стратегії ставок на найближчий футбольний матч.

3) Визначте, хто є сильнішим у змаганні з жиму від грудей штанги вагою 100 кг, якщо Петро з вагою тіла 80 кг виконав жим 10 раз, а Іван з вагою тіла 92 кг виконав жим 11 раз. Побудуйте графік залежності відносної сили спортсмена від маси його тіла, вважаючи сталою максимальну вагу, що може підняти спортсмен. За допомогою графіка поясніть, чому мураха «сильніший» від слона. Проведіть спортивні змагання «Найміцніше рукостискання» серед хлопців вашого класу за допомогою кистьового еспандера з фіксованою жорсткістю (у кг) та визначте переможця. Поясніть, чому обов’язково використовувати кистьовий динамометр перед змаганням.

4) Визначте вагу y (у кг) та зріст x (у см) ваших однокласників. Складіть за отриманими даними таблицю та нанесіть дані на систему координат. Проаналізуйте, чи виконуються лінійна залежність ваги людини від зросту $y = x - 110$.

5) З’ясуйте, скільки людей проживає у нашому місті зараз та скільки проживало у минулому році. Скільки відсотків складає приріст населення? Скільки людей буде проживати у нашому місті через 50 років при збереженні такої ж величини приросту?

Отже, виконання учнями портфоліо з розв’язування прикладних задач практичного характеру та якісних прикладних задач створює умови для індивідуалізації, диференціації навчання математики учнів класів з гуманітарним профілем навчання та можливості для показу цим учням ролі математики у їх майбутній професійній чи повсякденній діяльності, а відповідно забезпечує прикладну спрямованість шкільного курсу математики у класах з гуманітарним профілем навчання.

Список використаних джерел

1. Соколенко Л.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу : практикум / Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець – Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

Анотація. Шишенко І. До проблеми забезпечення прикладної спрямованості шкільного курсу математики у класах з гуманітарним профілем навчання. *У статті розглядається один із засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання математики у класах з гуманітарним профілем навчання, а саме виконання учнями портфоліо з розв'язування прикладних задач. Відповідно у статті розглянуто завдання та етапи виконання учнями портфоліо, а також наведено приклади завданнь, які доцільно пропонувати учням для виконання портфоліо.*

Ключові слова: *прикладна задача, учні класів з гуманітарним профілем навчання.*

Abstract. Shyshenko I. The problem of ensuring the applied direction of school's math in classes with humanitarian profile. *The article deals with one of the means of applied orientation of teaching mathematics in classes with humanitarian profile, namely students portfolio of the solution of applied problems. According to the article the tasks and stages of the disciples portfolio and examples of tasks that are appropriate to offer pupils for perform portfolio are consider.*

Keywords: *applications, students classes with humanitarian profile.*

Артем Юрченко
Викладач кафедри інформатики
a.yurchenko@fizmatsspu.sumy.ua

ПРО ВІРТУАЛЬНІ ТА ЦИФРОВІ ФІЗИЧНІ ЛАБОРАТОРІЇ

Стрімкий розвиток інформаційних систем призводить до необхідності узгодження нових комп'ютерних технологій з методикою навчання різних предметів в цілому. Основна мета впровадження інформаційних технологій полягає у вдосконаленні якості навчання, у досягненні більш глибокого і повного розуміння суті фізичних процесів і явищ, що вивчаються.

Це означає необхідність впровадження цифрової та комп'ютерної техніки в практику викладання тих предметів, які дозволяють це здійснити. До таких предметів в першу чергу відноситься фізика.

Розглядаючи фізичні лабораторії, то в першу чергу мають на увазі традиційні, ті що є на шкільних лабораторних столах.

Але наразі, принципово змінився не лише матеріально-технічний рівень забезпечення навчання різних предметів, а і з'явилися нові інформаційні засоби, які по своїй суті дозволяють організувати моделювання, емуляцію та експеримент і не вимагають при цьому додаткового спеціального обладнання.

До таких засобів у галузі фізики відносяться *віртуальні і цифрові фізичні лабораторії*, які наразі цікавлять не лише фізиків-науковців, а й дослідників у галузі педагогічних наук.

На зміну стандартним, реальним, традиційним лабораторіям прийшли віртуальні лабораторії.

Зазвичай, віртуальні лабораторії спрямовані на вироблення навичок в таких галузях, де реальне виконання досліджень вимагає значних затрат матеріалів, електроенергії, часу, наявності складного обладнання, значних грошових витрат або виявляє фактор небезпечного впливу на дослідника.

Термін «віртуальний» за словником Ожегова означає «неіснуючий, але можливий».

Віртуальна лабораторія – це віртуальна навчальна середа, яка дозволяє моделювати поведінку об'єктів реального світу в комп'ютерному середовищі і допомагає в оволодінні новими знаннями та вміннями. Така лабораторія може виступати апаратом досліджень різних природних явищ з можливістю побудови їх математичних і фізичних моделей [10].

Деякі науковці тлумачать визначення ВЛ як програмно-апаратний комплекс, що дозволяє проводити досліди без безпосереднього контакту з реальною установкою або при повній її відсутності. У першому випадку ми маємо справу з так званої лабораторної установкою з віддаленим доступом, до складу якої входить реальна лабораторія, програмно-апаратне забезпечення для керування установкою і оцифровки отриманих даних, а також засоби комунікації. У другому випадку всі процеси моделюються за допомогою комп'ютера [10].

Ми під ВЛ розуміємо повну заміну лабораторної установки – коли всім процесом вимірювання та обробки даних займається комп'ютер, а рука дослідника потрібна тільки для правильного налаштування комп'ютерного обладнання.

Сьогодні налічується велика кількість віртуальних фізичних лабораторій. Їх можна поділити на три групи за рівнем керування користувачем їх функціонування [2]:

Програми для візуалізації дослідів з встановленням деяких параметрів його проходження (рис. 1). Наприклад, до таких програм відноситься VirtuLab, розробник Віртуальна лабораторія "ВиртуЛаб", за допомогою програми можна змінювати деякі параметри перебігу дослідів і бачити зміни, що відбуваються, в залежності від встановлених параметрів.

Програми для моделювання окремого класу дослідів (рис. 2). Наприклад, до таких програм відноситься PhET Interactive Simulations, розробник University of Colorado. Програма складається з модулів, за допомогою яких відбувається моделювання окремих дослідів з встановленням різних параметрів їх перебігу і вибору інструментарію для їх проведення («Вивчення законів заломлення світла»)

Програми для моделювання роботи лабораторії – складні системи, в основі функціонування яких лежить потужний математичний апарат (рис. 3). Суттєвою відмінністю програм даної групи є те, що користувач може додавати моделювання нових дослідів з встановленням параметрів їх проходження. Прикладом такої програми, є комерційна програма Yenka, розробник CrocodileClipsLtd («Експериментальне дослідження закону Гука»)

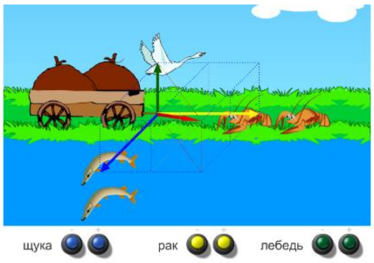

Рис. 1. Віртуальна лабораторна робота «Додавання сил, спрямованих під кутом», ВЛ "ВиртуЛаб

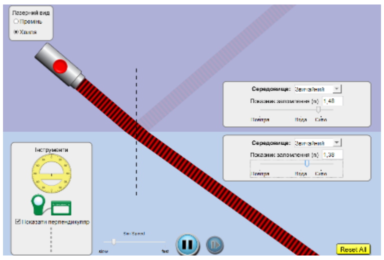

Рис. 2. Віртуальна лабораторна робота «Вивчення законів заломлення світла», ВЛ "PhET"

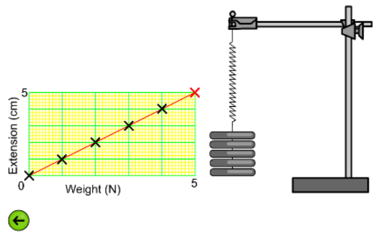

Рис. 3. Віртуальна лабораторна робота «Експериментальне дослідження закону Гука», ВЛ " Yenka"

Для студентів педагогічних та технічних навчальних закладів доцільно розглядати можливість використання прикладних пакетів проектування або ВЛ при вивченні спецкурсів «Основи сучасної електроніки», «Радіотехніка», «Інформаційні системи» – Electronics Workbench, LabVIEW, NI Multisim тощо.

Завдяки активному і повсюдному використанню комп'ютерної техніки та розвитку інтерактивного програмного забезпечення, яке покликане унаочнювати демонстрації різних фізичних процесів, моделювати досліди та опрацьовувати результати в автоматизованому режимі почали з'являтися «симбіози» традиційних та віртуальних лабораторій – *цифрові*.

Цифрові лабораторії не є заміною процесу виконання досліджень, а є реальною частиною фізичної установки реального фізичного явища. Вони дають можливість більш точно, більш наочно і правильніше виконати ту чи іншу лабораторну роботу.

Використання ЦЛ дозволяє отримати уявлення про суміжні освітні області: інформаційні технології; сучасне обладнання дослідної лабораторії; математичні функції і графіки, математична обробка експериментальних даних, статистика, наближені обчислення; методика проведення досліджень, складання звітів, презентація виконаної роботи – так як все це можна легко зробити з допомоги ЦЛ [1].

Аналіз науково-методичної літератури, періодичних видань та інтернет-джерел стосовно використання терміну «цифрова лабораторія» дозволяє стверджувати, що під ЦЛ розуміють сукупність спеціальної цифрової техніки та відповідного програмного забезпечення для її використання та подальшого опрацювання «знятих» результатів [4].

Заболотний В.Ф. та Лаврова А.В. трактують термін ЦЛ як сучасна універсальна комп'ютеризована лабораторна система, яка використовується для проведення широкого спектру досліджень, демонстрацій, лабораторних робіт з фізики, хімії та біології тощо [3].

Загалом, наразі у світі нараховується велика кількість різноманітних ЦЛ. Вони призначені не тільки для експериментів і лабораторних дослідів під час вивчення явищ та законів фізики, а й для досліджень при вивченні біології, географії, хімії тощо.

Перші покоління ЦЛ були розраховані тільки на лабораторні роботи для учнів [5]. У їх основу входили КПК Palm M130 і вимірювальні інтерфейси (реєстратори даних) ImagiWorks (рис. 4).

Наступні, більш сучасні версії лабораторій дозволяють проводити і демонстраційний експеримент, а також дають можливість розміщувати дані і результати обробки в інформаційне середовище, у тому числі, і середовища дистанційного навчання або інформаційні засоби навчання.

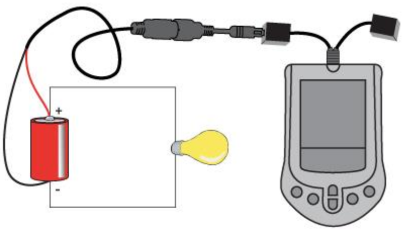

Рис. 4. ЦЛ на основі КПК Palm M130.

Рис. 5. Реєстратор даних ЦЛ «Einstein»

Рис. 6. ЦЛ «LabDisc»

Серед популярних лабораторій згадаємо наступні [9]:

Цифрова лабораторія «Einstein» (рис. 5) передбачає використання різних цифрових датчиків, за допомогою яких можна проводити широкий спектр досліджень, демонстраційних і лабораторних робіт, а також здійснювати науково-дослідні проекти, що сприяють вирішенню міжпредметних завдань. Програмне забезпечення для аналізу експериментальних даних є простий, зручний, інтуїтивно зрозумілий школярам інтерфейс. Задану ЦЛ з успіхом використовують для проведення шкільних лабораторних робіт та досліджень під час експедицій у позашкільний час.

Мобільна природничо-наукова лабораторія «LabDisc» (рис. 6) з мультисенсорним реєстратором даних для проведення експериментів у курсах природничих наук у початковій і середній школі. У ЦЛ «LabDisc» передбачено використання інструменту автоматичного тестування і калібрування усіх датчиків, внаслідок чого вимірювання можуть початися вже у момент його включення. ЦЛ не є прив'язаною до певного програмного забезпечення, а всі результати вимірів зберігає у собі. ЦЛ «LabDisc» використовується в навчальних закладах країн Європи.

ЦЛ «Pasco» (рис. 7) є високотехнологічною науковою лабораторією, широкий спектр обладнання якої дозволяє викладачеві та учням за допомогою високоточних датчиків демонструвати і проводити досліди з фізики, хімії, біології, географії, екології, а також ряд наукових експериментів в рамках університетської програми з фізики. Основним елементом ЦЛ «Pasco» є мобільний пристрій SPARK ScienceLearningSystem. За допомогою мобільного пристрою можна знімати показання з датчиків «Pasco», візуалізувати отримані дані і проводити аналіз цих даних. За час існування ЦЛ «Pasco» активними користувачами пристроїв стали шкільні вчителі, викладачі вузів, школярі та студенти з більш ніж 80 країн світу.

Рис. 7. Мобільний пристрій SPARK, ЦЛ «Pasco»

Рис. 8. Планшет ЦЛ «Relab Inside»

Рис. 9. Вимірювальний блок, ЦЛ «L-мікро»

Класична ЦЛ «Relab» (рис. 8)за своїми параметрами поділяється на три типи. ЦЛ «Relab Standart» датчики якої підключаються безпосередньо до планшета, персонального комп'ютера або ноутбука без додаткових пристроїв (реєстраторів). «Relab Inside» – ЦЛ з вбудованими датчиками. Цифрова лабораторія являє собою блок, з планшетом на базі ОС Android та інтегрованими в корпус вимірювальними приладами. «Relab Point» – лабораторія на базі мультидатчика, який поставляється у форм-факторі стандартних вимірювальних пристроїв Relab, але фактично містить від двох до восьми датчиків усередині корпусу.

ЦЛ «L-мікро» (рис. 9) являє собою єдине експериментальне середовище, об'єднуючи демонстраційне обладнання і набори для лабораторних робіт та практикуму. Його ядром є персональний комп'ютер з вимірювальним блоком. Комп'ютерний вимірювальний комплекс доповнюється цифровими вимірювачами. Сьогодні, вивчення методики проведення демонстраційного експерименту на ЦЛ «L-мікро» входить в програму навчання студентів ВНЗ.

До нового покоління шкільних природничо-наукових лабораторій, призначених для проведення демонстраційних дослідів, лабораторних і практичних робіт, організації навчальних досліджень в галузі фізики, біології та хімії відносять *ЦЛ FourierEdu* до складу якої входять датчики та реєстратор і яка пропонується у двох варіантах [8].

Основу першого варіанту (рис. 10) складає NOVA Link – особливий реєстратор, який за допомогою USB кабелю може бути приєднаний до будь-якого комп'ютера. Реєстратор має 4 порти, через які може бути одночасно підключено до восьми датчиків (рис. 12), що більш ніж достатньо для проведення різних за рівнем складності експериментів і істотно розширює можливість індивідуальної і групової діяльності учнів.

Другий варіант (рис. 11) – мобільний, в якому аналогічний реєстратор об'єднаний в одному корпусі з КПК «NOVA 5000».

Рис. 10. NOVA Link і комплект датчиків

Рис. 11. КПК «NOVA 5000» і датчики

а *б*

Рис. 12. Підключення датчиків до реєстратора даних NOVA Link

Компанія Fourier Education випускає більше 65 різних датчиків, але ці датчики відносяться не тільки до фізики, а й для лабораторних з біології, хімії.

Усі дані прийняті з датчиків ЦЛ відправляються у програмне забезпечення лабораторії, яке має назву MultiLab

MultiLab – це комплексний додаток, що забезпечує реєстрацію експерименту: збір кількісних даних (показів датчиків), відображення їх на графіку, у таблиці, на табло приладу і математичну обробку отриманих даних. Також, мультимедійні можливості MultiLab дозволяють супроводжувати отримані дані синхронізованими відео- і аудіоматеріалами; містять відеоаналізатор руху, який здатний перетворювати відеозапис будь-якого руху в набір даних [7].

Головне вікно програмного забезпечення MultiLab складається з чотирьох основних вікон: вікно графіків, вікно таблиць, вікно відео і навігаційне вікно, зване картою даних. Можна відкривати всі вікна одночасно або тільки деякі з них [11].

Найбільш часто використовувані інструментальні засоби і команди показані на трьох панелях інструментів (рис. 13). Інструменти, які діють у всіх режимах роботи програми, і інструменти управління реєстратором розміщені на головній панелі. Інструменти для роботи з графіками знаходяться на панелі графіків, інструменти таблиці – на панелі таблиці.

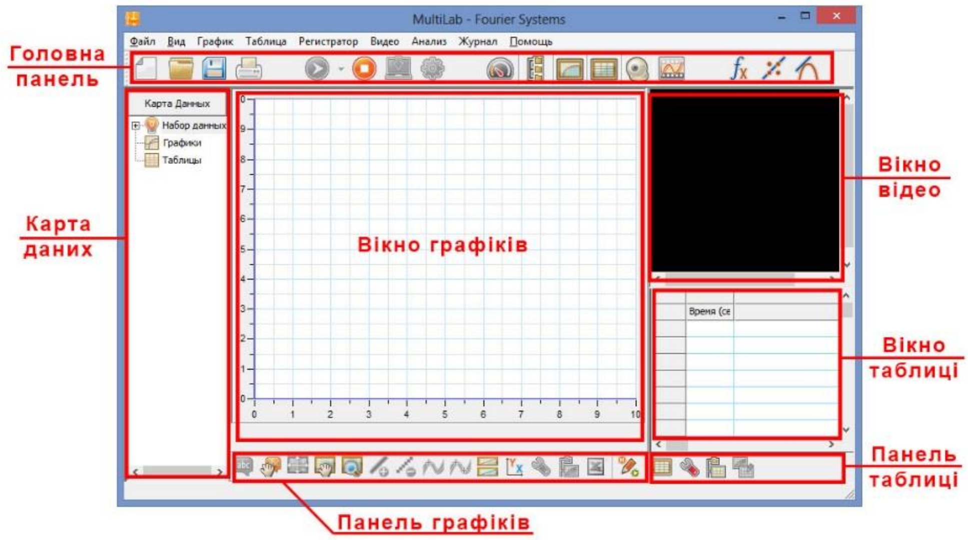

Рис. 13. Головне вікно програмного забезпечення MultiLab

Програма MultiLab ЦЛ FourierEdu дозволяє [8]:

- проводити експерименти на реальному обладнанні (на відміну від віртуальних лабораторій, що пропонують комп’ютерні моделі дослідів);
- вибирати різні способи відображення даних: у вигляді графіків, таблиць, табло вимірювальних приладів;
- проводити математичну обробку отриманих даних за допомогою Майстра аналізу;
- проводити відеоаналіз руху тіла на площині, зафіксованого в процесі відеозйомки (необхідно зняти рухомий об'єкт на відео або вирізати потрібний фрагмент з готового фільму, а потім зробити оцифровку руху);
- вести журнал експериментів;

- конвертувати дані експерименту в текстовий формат додатків WORD і EXCEL;
- отримувати дані від пристрою NovaLink в режимі реального часу (дозволяє підвищити наочність експерименту і візуалізацію його результатів);
- синхронізовано відтворювати відеозапис експерименту і побудову графіка процесу (дозволяє скоротити час, який витрачається на проведення фронтального або демонстраційного експерименту на уроці, тому що можливо демонструвати складні, "примхливі", найбільш ефектні експерименти, вибрані з безлічі заздалегідь проведених і записаних дослідів).

Простота у керуванні цифровими лабораторіями є важливим моментом при виборі обладнання для фізичних дослідів. Програмне забезпечення Multilab ЦЛ FourierEdu є яскравим прикладом доступності для вчителів і учнів. Розібратися з комплексним додатком реєстрації даних буде легко як вчителям так і учням, які мають середній рівень знання ПК.

Для успішного виконання лабораторної роботи за допомогою ЦЛ треба: реєстратор даних, цифрові датчики, MultiLab та комп’ютер [5] (рис. 14).

Рис. 14. Комлектація ЦЛ FourierEdu
для успішного виконання лабораторних робіт

Цифрові лабораторії надають можливість:

- скоротити час, який витрачається на підготовку і проведення фронтального або демонстраційного експерименту;
- підвищити наочність експерименту та візуалізацію його результатів, розширити список експериментів;
- проводити вимірювання в польових умовах;
- модернізувати вже звичні експерименти.

До недоліків більшості ЦЛ можна віднести:

- вартість обладнання – не всі школи можуть їх отримати, так як обладнання коштує великих грошей;
- не адаптованість до університетської програми – майже всі лабораторії розроблені для виконання лабораторних робіт та практикумів по шкільній програмі і не дають можливості використання їх у вищих навчальних закладах;

- «слабе» методичне забезпечення – використовуючи лабораторії учителю треба удосконалювати усі шкільні лабораторні роботи традиційного типу до робіт із застосуванням лабораторії. Це пов'язано з тим, що у вільному доступі майже не має розроблених лабораторних робіт із використанням ЦЛ, хоча деякі фірми-розробники розповсюджують безкоштовні розробки робіт.

Але не зважаючи на недоліки, освоєння цифрових лабораторій відіграє позитивну роль у становленні майбутнього вчителя і науковця [6].

ЦЛ не заміняють, а удосконалюють процес виконання лабораторних робіт. Завдяки їм можна швидше, якісніше, точніше, правильніше відтворити фізичний експеримент і з легкістю отримати результати підраховані комп'ютером, даючи змогу подальшого аналізу чи доопрацювання результатів того чи іншого фізичного явища.

Означення ЦЛ, які розглядалися, давалися з урахуваннями використання засобу у шкільному навчанні фізики. Це дозволяє говорити про актуальність проблеми формування умінь використовувати такі ЦЛ вчителями фізики, що зумовило необхідність знайомства з ними студентів відповідних спеціальностей вищих навчальних закладів. Усвідомлюючи таку потребу, у НПУ ім. М.П. Драгоманова розпочато роботу з впровадження у навчальний процес підготовки фізиків-бакалаврів однієї з провідних на сьогоднішній день ЦЛ FourierEdu на базі програмного забезпечення Multilab [4].

Як зазначають розробники, застосування у навчальному процесі ЦЛ FourierEdu має на меті полегшити розуміння фізичних явищ, підвищити інтерес до досліджуваних дисциплін, розширити дослідницьку складову у вивченні природничих наук, а також навчити користуватися інформаційними технологіями як сучасним і зручним інструментом.

Список використаних джерел

1. Верховцева М.О. Современные цифровые лаборатории в подготовке студентов физических специальностей педагогического института / Порохов Д.А., Трополева О.Л. // Естественно-математическое образование в современной школе. Сборник научных трудов / Под общ.ред. М.А. Шаталова. – Вып.3. – СПб., ЛОИРО, 2009. – С.190-194.
2. Жук Ю.О. Організація суб'єктно орієнтованого навчального середовища у дидактичному просторі «віртуальна лабораторія» [Електронний ресурс] / Ю. О. Жук // Інформаційні технології і засоби навчання. — К. : ІІТЗН НАПН України, 2010. — № 3 (17). — Режим доступу: http://www.ime.edu-ua.net/em17/emg.html.
3. Заболотний В.Ф. Навчальний фізичний експеримент з використанням цифрової лабораторії Nova5000 / В.Ф. Заболотний,

А.В. Лаврова // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Сер. : Педагогічна. – 2013. – Вип. 19. – С. 82-85. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/znpkp_ped_2013_19_31.pdf.

4. Кудін А.П., Юрченко А.О. Програмне забезпечення реальних фізичних лабораторних практикумів / А.П. Кудін, А.О. Юрченко. // Збірник наукових праць Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна / [редкол.: П. С. Атаманчук(голова, наук. ред.) та ін.]. — Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – 2015. — Вип. 21: Дидактика фізики як концептуальна основа формування компетентнісних і світоглядних якостей майбутнього фахівця фізико-технологічного профілю. – С. 248–251.

5. Петриця А. Особливості використання цифрових лабораторій у навчальному фізичному експерименті / А. Петриця // Молодь і ринок. – 2014. – № 6. – С. 44-48. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Mir_2014_6_11.pdf.

6. Семеніхіна О., Юрченко А. Формування інформатичної компетентності вчителя математики і фізики на основі використання спеціалізованого програмного забезпечення / О. Семеніхіна, А. Юрченко. // Наукові записки. – Випуск 8. – Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 3. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2015 – С. 52-57.

7. Федорова Ю.В. Лабораторный практикум по физике с применением цифровых лабораторий: Книга для учителя. / А.Я. Казанская, А.Ю. Панфилова, Н.В. Шаронова. — М.: Бином, 2012. — 190 с.

8. Филиппова И. Я. Цифровая лаборатория "Архимед" [Электронный ресурс] : [Веб-сайт]. – Информационные технологии в преподавании физики. – Режим доступа: http://ifilip.narod.ru/arch (дата обращения 07.05.2016).

9. Юрченко А. Цифрові фізичні лабораторії як актуальний засіб навчання майбутнього вчителя фізики // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми : СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2015. – № 1 (4). – С. 55-63.

10. Юрченко А.А. Виртуальные лаборатории в учебной физической среде [Електронний ресурс] / А.А. Юрченко // Інформаційні технології в професійній діяльності – 2016. – №10. – Режим доступу до ресурсу: http://e.itvpd.in.ua/index.php/itvpd/article/view/46

11. Юрченко А.О. Про цифрові лабораторії як сучасного засобу навчання майбутніх учителів фізики / Теоретико-методичні засади вивчення сучасної фізики та нанотехнологій у загальноосвітніх та вищих

навчальних закладах: матеріали І Міжрегіональної науково-методичної конференції, м. Суми, 26-27 листопада 2015 р. – Суми: СумДПУ, 2015. – С. 86-88.

Анотація. Юрченко А. Про віртуальні та цифрові фізичні лабораторії. У статті розглянуто поняття «віртуальна» та «цифрова» фізичні лабораторії, їх відмінність. Обґрунтовано потребу у вивченні майбутніми вчителями фізики цифрових фізичних лабораторій та зазначено про актуальність розробки відповідного методичного забезпечення на рівні педагогічного університету та загальноосвітнього навчального закладу.

Ключові слова: цифрова лабораторія, віртуальна лабораторія, комп’ютерний фізичний експеримент, ЦЛ, Fourier Systems.

Abstract. Yurchenko A. About virtual and digital physical laboratory. The article discusses the concept of "virtual" and "digital" physical laboratory, the difference between them. It justifies the need to study future digital physics teachers in physical laboratories and indicates the relevance of developing appropriate methodological support at the level of pedagogical University and secondary schools.

Keywords: digital laboratory, virtual laboratory, computer physical experiment, DL, Fourier Systems.

Олексій Яременко
доцент кафедри фізики та методики навчання фізики

КОМПЕТЕНТНІЙСНИЙ ПІДХІД ПРИ НАВЧАННІ ФІЗИКИ

Впровадження в совіту нових інформаційних форм та методів має вплив на зміст, методи і організацію навчального процесу у всіх дисциплінах та сферах діяльності учителя та учня.

Аналізуючи різні схеми організації навчального процесу, ми прийшли до усвідомлення необхідності модернізації і застосування компетентнісного підходу в навчанні. З точки зору розвитку в учнів ключових компетенцій, можна запропонувати наступну схему:

КЛЮЧОВІ КОМПЕТЕНЦІЇ

ІНФОРМАЦІЙНА	КОМУНІКАТИВНА	КООПЕРАТИВНА	ПРОБЛЕМНА
Електронні підручники	Комп'ютерні програми моделювання та демонстраційного експерименту	Комп'ютерні науково-дослідницькі роботи учнів	Комп'ютерні науково-дослідницькі роботи учнів
Комп'ютерні програми моделювання та демонстраційного експерименту	Комп'ютерні лабораторні роботи	Комп'ютерні лабораторні роботи	Комп'ютерні лабораторні роботи
Комп'ютерні лабораторні роботи	Комп'ютерні науково-дослідні роботи учнів	Комп'ютерні програми моделювання та демонстраційного експерименту	Комп'ютерні програми моделювання та демонстраційного експерименту
Комп'ютерні науково-дослідні роботи учнів	Електронні підручники		Творчий іспит із застосуванням комп'ютерних технологій
Комп'ютерні демонстрації	Творчий іспит із застосуванням комп'ютерних технологій		Комп'ютерне тестування

Остання запропонована схема дає більш чітку картину усвідомлення цілей освітнього процесу складається з: визначення цілей навчання учнів педагогом, цілей вивчення учнями даного навчального матеріалу, а також сукупності методів і прийомів для їх досягнення. Тобто, кажучи мовою системи компетентнісного підходу - формування в учнів сукупності ключових компетенцій.

Як видно з наведеної моделі, основними формами навчальної діяльності дозволяють опанувати учням ключовими компетенціями, на наш погляд є: комп'ютерні науково-дослідні роботи, комп'ютерні лабораторні роботи і комп'ютерні програми моделювання та демонстраційного експерименту.

Саме вони в першу чергу, сприяють набуттю учнями навичок самостійного пошуку відповідей на поставлені питання, самостійне вирішення проблемних ситуацій, умінь аналізувати факти, узагальнювати і робити логічні висновки. Освоєння учнями таких умінь, які дозволяли б їм визначати свої цілі, приймати рішення і діяти в типових і нестандартних ситуаціях.

Щоб успішно реалізувати інноваційні методи навчання, педагог повинен вміти:

1. Досконало володіти сучасними інформаційними знаннями, технологіями та методикою їх застосування.
2. Успішно вирішувати свої власні життєві проблеми, проявляючи ініціативу, самостійність і відповідальність.
3. Бачити і розуміти дійсні життєві інтереси своїх учнів;
4. Виявляти повагу до своїх учнів, до їх думок і питань, навіть якщо ті здаються на перший погляд важкими і провокаційними, а також до їх самостійним пробам і помилкам.
5. Відчувати проблемність досліджуваних ситуацій.
6. Пов'язувати досліджуваний матеріал з повсякденним життям і інтересами учнів, характерними для їх віку.
7. Закріплювати знання і вміння у навчальній та зовні навчальній практиці.
8. Планувати урок з використанням усього розмаїття форм і методів навчальної роботи, і, перш за все, всіх видів самостійної роботи (групової та індивідуальної), діалогічних і проектно-дослідницьких методів.
9. Ставити цілі і оцінювати ступінь їх досягнення спільно з учнями.
10. Досконало використовувати метод "Створення ситуації успіху".
11. Залучати для обговорення минулий досвід учнів, створювати новий досвід діяльності та організовувати його обговорення без зайвих витрат часу.
12. Оцінювати досягнення учнів не тільки відміткою-балом, а й змістовною характеристикою.
13. Оцінювати просування класу в цілому і окремих учнів не тільки на уроках, а й у розвитку тих чи інших життєво важливих якостей.

Проте вказані пункти не є догмою, а є основними для успішної реалізації іннофвацийних методів навчання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сучасні освітні технології у викладанні фізики / Ірина Задніпрянець / упоряд. Л. Хольвінська. – К.: Шк. світ, 2011. – 128 с.
2. Інформаційні технології в освіті: Збірник наукових праць. Випуск 2. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2008. – 156 с.
3. Пультер С. До питання впровадження нових освітніх технологій у середній та вищій школі // Дивослово. - 2005. - № 3. - С. 2-4.

Аннотація. Олексій Яременко, Ярослав Балабан. Компетентнійсний підхід при навчанні фізики. Приведена модель, яка вказує основні форми навчальної діяльності учнів, які дозволяють їм опановувати ключовими компетенціями, сприяютьнабуттю учнями навичок самостійного розв'язування проблем.

Клюьові слогва: інноваційні методи навчання, компетентнійсний підхід, комп'ютерні лабораторні роботи.

Annotations. Alex Yaremenko, Jaroslav Balaban. Kompetentniysnyy approach in teaching physics. Present a model that specifies the basic forms of learning activities of students that enable them to acquire the key competencies, skills of independent spryyayutnabuttyu students solving problems.

Klyuovi slohva: innovative teaching methods kompetentniysnyy approach, computer laboratory work.

Наукове видання

НАУКОВІ ДОПОВІДІ

викладачів фізико-математичного факультету

ВИПУСК 1

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск
Ю.В. Хворостіна

Комп'ютерна верстка
Ю.В. Хворостіна

Фізико-математичний факультет
СумДПУ імені А.С. Макаренка
вул. Роменська, 87
м. Суми, 40002
тел. (0542) 68 59 10

http://fizmatsspu.sumy.ua